

# EINE NEUE UND LEICHTE METHODE DIE VARIATIONSRECHNUNG ZU BEHANDELN\*

Leonhard Euler

§1 Wenn irgendeine Gleichung zwischen den Variablen  $x$  und  $y$  gegeben ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, wenn  $y$  irgendeine Funktion von  $x$  war, dann werden alle Ausdrücke, die auf irgendeine Weise aus diesen zwei Größen  $x$  und  $y$  gebildet und zusammengesetzt worden sind, als Funktionen der einen Variable  $x$  betrachtet werden können, sodass für jeden bestimmten Wert von  $x$  sie auch bestimmte Werte erhalten.

§2 Von Ausdrücken dieser Art aber, die aus den Größen  $x$  und  $y$  gebildet worden sind, ist es gefällig, dass drei Arten festgelegt werden; zu deren erster zählen wir alle jene Ausdrücke, in denen nur die Größen  $x$  und  $y$  selbst auftauchen und durch irgendwelche entweder algebraischen oder transzendenten Operationen miteinander kombiniert worden sind, von welcher Art  $\alpha x^3 + \beta xy + \gamma y^3$  und ebenso  $e^{\alpha x} \arcsin y$  sind, in welcher letztgenannten transzendente Operationen wahrgenommen werden. Aber die zweite Art umfasst die Ausdrücke, in denen außer den Größen  $x$  und  $y$  selbst auch ein Verhältnis von Differentialen auftaucht, welches Verhältnis wir sogar bis hinzu Differentialen jedes Grades ausdehnen; damit wir die Gestalt von Ausdrücken welcher Art besser erkennen, werde auf gewohnte Weise festgelegt

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{etc.},$$

---

\*Originaltitel: „Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi“, erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 16, 1772, pp. 235-70“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 25, pp. 208-235“, Eneström-Nummer E420, übersetzt von: Alexander Aycok, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

und solche Ausdrücke werden Funktionen der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. sein. Schließlich enthält die dritte Art Ausdrücke solcher Art, in denen zusätzlich Integralformeln involviert werden, worauf sich jene Ausdrücke beziehen, die in dem Variationskalkül besonders betrachtet worden sind und die in dieser Form  $\int V dx$  dargestellt worden sind, wo  $V$  irgendeine Funktion nicht nur von  $x$  und  $y$  ist, sondern auch der Größen  $p, q, r$  etc., ja sie kann sogar darüber hinaus andere Integralformeln involvieren.

§3 Nachdem diese Dinge über die drei Arten von Ausdrücken dieser Art festgelegt worden sind, werden wir leichter die Gestalt des Variationskalküls erklären können. Die ganze Aufgabe geht nämlich darauf zurück, dass wenn irgendeine Relation zwischen  $x$  und  $y$  vorgelegt worden war und sie ein wenig variiert wird, oder anstelle ihrer eine andere gewisse Relation zwischen  $x$  und  $y$ , die sich von jener wie auch immer nur unendlich wenig unterscheidet, verwendet wird, muss untersucht werden, eine wie große Veränderung alle jener Ausdrücke, so der ersten, wie der zweiten und der dritten Art eingehen werden, um welche zu finden, im Variationskalkül, wie ich für meine Person ihn freilich einst behandelt habe, außer dem Differential  $dy$ , um welches die Größe  $y$  vermehrt werden wird, während  $x$  in  $x + dx$  übergeht, der Größe  $y$  selbst ein anderer Zuwachs  $\delta y$  zugeteilt wird, der völlig von unserem Belieben abhängt und nicht durch  $x$  bestimmt worden ist, welchem Zuwachs ich den Namen der Variation gegeben hatte und die Methode erläutert hatte, Variationen, die sich daher auf die einzelnen Arten der Ausdrücke ergießen, zu finden.

§4 Es schien also das Variationskalkül eine ganz und gar einzigartige Art des Kalküls zu begründen, aber nachdem ich seine Gestalt genauer untersucht hatte, habe ich erkannt, dass dieses Kalkül mit einer geringen Änderung auf den zweiten Teil der Integralrechnung, dessen Elemente ich im dritten Band meines Werkes über diesen Gegenstand erläutert habe, zurückgeführt werden kann. Ich habe aber in diesem zweiten Teil die Integrationen behandelt, die sich mit Funktionen zweier Variablen beschäftigen, in welcher Art es immer noch kaum möglich war, weiter als die ersten Elemente fortzuschreiten.

§5 Anstelle dieses Zuwachses, welchen ich Variation genannt haben, betrachte ich natürlich die Größe  $y$  selbst nicht weiter als Funktion der Variable

$x$  allein, sondern führe sie als Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $t$  in die Rechnung ein, nämlich so, während  $dx(\frac{dy}{dx})$  das wahre Differential von  $y$  bezeichnet,  $dt(\frac{dy}{dt})$  dasselbe bezeichnen können wird, was wir zuvor mit dem Zeichen  $\delta y$  gekennzeichnet haben. Damit aber diese Dinge klarer gemacht werden, wollen wir  $y$  wie die Ordinate einer gewissen Kurve bezeichnen, die der Abszisse  $x$  entspreche, und im Variationskalkül wird eine andere Relation verlangt, die alle anderen dieser zumindest sehr nahen Kurven umfasst, und dass alle Kurven dieser Art, wenn  $X$  jene Funktion bezeichnet, welcher  $y$  gleich wird, in einer solchen Gleichung enthalten sein können:  $y = X + tV$  ist klar, während  $V$  irgendeine Funktion von  $x$  bezeichnet. Nachdem nämlich  $t$  unendlich klein genommen worden ist, wird diese Gleichung ganz und gar alle der vorgelegten sehr ähnlichen gekrümmten Linien in sich erfassen und daher lässt sich diese Form um vieles allgemeiner machen, sodass für  $y$  irgendeine Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $t$  benutzt werden kann, solange sie so beschaffen war, dass für  $t = 0$  gesetzt die vorgelegte Funktion  $y = X$  selbst hervorgeht.

§6 Für das Finden der Variation muss die Größe  $x$  wie eine Konstante betrachtet werden, das Differential von  $y$  muss aber nur aus der Variabilität von  $t$  entnommen werden; daher, wenn der vorgelegte Ausdruck von der ersten Art war, natürlich eine Funktion nur von  $x$  und  $y$ , welche wir mit dem Buchstaben  $Z$  bezeichnen wollen, wollen wir festlegen, dass nach der üblichen Differentiation  $Mdx + Ndy$  hervorgeht, und nun werde für die zu findende Variation  $dx = 0$  sein, aber anstelle von  $dy$  werde  $dt(\frac{dy}{dt})$  geschrieben, welches natürlich die Zunahme ist, die allein aus der Variabilität von  $t$  entsteht. Danach wird die gesuchte Variation dieses Ausdrucks  $Z = Ndt(\frac{dy}{dt})$  sein. Wenn daher die Variation selbst auf die gleiche Weise durch  $dt(\frac{dZ}{dt})$  bezeichnet wird, werden wir  $(\frac{dZ}{dt}) = N(\frac{dy}{dt})$  haben.

§7 Nun wollen wir zu den Ausdrücken der zweiten Art fortschreiten, weil in diesen außer  $x$  und  $y$  auch die Größen  $p, q, r$  etc. auftauchen und deren Variationen von  $y$  wie auch von der Variable  $t$  abhängen, werden sie durch ein allgemeines Bildungsgesetz mit diesen Formeln ausgedrückt werden

$$dt\left(\frac{dp}{dt}\right), \quad dt\left(\frac{dq}{dt}\right), \quad dt\left(\frac{dr}{dt}\right) \quad etc.$$

Weil sie aber für die Variable  $x$  allein ist, sei

$$p = \left( \frac{dy}{dx} \right), q = \left( \frac{dp}{dx} \right) = \left( \frac{ddy}{dx^2} \right) \text{ und } r = \left( \frac{dq}{dx} \right) = \left( \frac{ddp}{dx^2} \right) = \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right) \text{ etc.,}$$

es wird durch die allgemeinen Regeln Funktionen zweier Variablen zu differenzieren gelten

$$\left( \frac{dp}{dt} \right) = \left( \frac{ddy}{dx dt} \right), \quad \left( \frac{dq}{dt} \right) = \left( \frac{d^3y}{dx^2 dt} \right), \quad \left( \frac{dr}{dt} \right) = \left( \frac{d^3y}{dx^3 dt} \right) \text{ etc.,}$$

wo es förderlich sein wird sich dessen zu erinnern, dass die Formel  $\left( \frac{d^3y}{dx^2 dt} \right)$  eines Beispiels wegen hervorgeht, wenn die Funktion  $y$  dreimal differenziert wird und erst zweimal allein  $x$ , danach aber einmal allein  $t$  als Variable genommen wird, dann aber nach jeder beliebigen Differentiation die einfachen Differentiale  $dx$  oder  $dt$  fallen gelassen werden.

§8 Nachdem diese Dinge erledigt worden sind, sei nun  $Z$  irgendeine Funktion von  $x, y, p, q, r$  etc., und es gehe, natürlich noch unter völliger Missachtung der Variable  $t$ , die selbstredend nur für die Variation eingeführt wird, und nach einer auf gewohnten Weise unternommenen Differentiation, hervor

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.};$$

nun wird also für das Finden der Variation oder  $dt \left( \frac{dZ}{dt} \right)$  das geschrieben werden müssen, sodass folgt:

$$dx = 0, \quad dy = dt \left( \frac{dy}{dt} \right), \quad dp = dt \left( \frac{dp}{dt} \right) = dt \left( \frac{ddy}{dx dt} \right), \\ dq = dt \left( \frac{d^3y}{dx^2 dt} \right), \quad dr = dt \left( \frac{d^4y}{dx^3 dt} \right) \text{ etc.,}$$

und die gesuchte Variation wird sein

$$dt \left( \frac{dZ}{dt} \right) = Ndt \left( \frac{dy}{dt} \right) + Pdt \left( \frac{ddy}{dx dt} \right) + Qdt \left( \frac{d^3y}{dx^2 dt} \right) + R \left( \frac{d^4y}{dx^3 dt} \right) + \text{etc.,}$$

woher nach Division durch  $dt$  folgt, dass gelten wird:

$$\left( \frac{dZ}{dt} \right) = N \left( \frac{dy}{dt} \right) + P \left( \frac{ddy}{dx dt} \right) + Q \left( \frac{d^3y}{dx^2 dt} \right) + R \left( \frac{d^4y}{dx^3 dt} \right) + \text{etc.}$$

§9 Es sei nun irgendein Ausdruck der dritten Art  $\int Zdx$  vorgelegt, wo  $Z$  irgendeine Funktion von  $x, y, p, q, r$  etc. ist, sodass man durch die gewöhnliche Differentiation hat:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr,$$

wo freilich bisher der neuen Variable  $t$  noch keine Rechnung getragen worden ist und die Integration der vorgelegten Formel  $\int Zdx$  allein durch die Variable  $x$  zu erledigen ist, nach Bemerken wessen die Frage darauf zurückgeht, dass, wenn nun  $y$  wie eine Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $t$  betrachtet wird und überall die Größe  $y$  um das Element  $dt(\frac{dy}{dt})$  vermehrt wird, der Zuwachs, welchen die Integralformel  $\int Zdx$  selbst daher nehmen wird, bestimmt wird, dieser Zuwachs nämlich die Variation der vorgelegten Integralformel sein wird.

§10 Daher, um diese Variation zu finden, werde in jener Funktion  $Z$  überall anstelle von  $y$  sein vermehrter Wert  $y + dt(\frac{dy}{dt})$  geschrieben, und so, wie wir zuvor gesehen haben, wird die Funktion  $Z$  selbst den Zuwachs  $dt(\frac{dZ}{dt})$  nehmen, aus welchem die Integralformel selbst diesen Zuwachs erfahren wird:  $\int dt(\frac{dZ}{dt})dx$ , welcher die gesuchte Variation sein wird. Weil ja aber in dieser Integration allein  $x$  für die Variable gehalten wird, wird das Element  $dt$  vor das Integralzeichen gestellt werden können, sodass nun die Variation gleich  $dt \int dx(\frac{dZ}{dt})$  sein wird.

§11 Weil man ja also in §8 den entwickelten Wert von  $(\frac{dZ}{dt})$  hat, wenn jener hier eingesetzt wird, die Variation der Formel  $\int Zdx$  so ausgedrückt hervorgehen wird:

$$dt \int dx \left( N \left( \frac{dy}{dt} \right) + P \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) + Q \left( \frac{d^3y}{dx^2dt} \right) + R \left( \frac{d^4y}{dx^3 \cdot dt} \right) + \text{etc.} \right),$$

welche auch auf folgende Weise durch Teile dargestellt zu haben es förderlich sein wird

$$\begin{aligned} dt \int Ndx \left( \frac{dy}{dt} \right) + dt \int Pdx \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) + dt \int Qdx \left( \frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt} \right) \\ + dt \int Rdx \left( \frac{d^4y}{dx^3dt} \right) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

mit welchem Ausdruck wir zufrieden sein können, wenn die Frage über irgendeinen bestimmten Fall gestellt werden würde, wo  $y$  nicht nur einer gewissen gegebenen Funktion von  $x$  gleich werden würde, sondern auch die neue Variable  $t$  auf bestimmte Weise eingeführt werden würde; dann wäre es nämlich möglich, alle diese Formeln  $(\frac{dy}{dt})$ ,  $(\frac{ddy}{dxdt})$ ,  $(\frac{d^3y}{dx^2dt})$  etc. tatsächlich zu entwickeln, sodass dann das Element  $dx$  allein mit einer Funktion von  $x$  behaftet wäre, weil ja, wie wir anfangs angedeutet haben, nach der Entwicklung wiederum  $t = 0$  gesetzt werden muss.

**§12** Aber in der Tat pflegen solche bestimmten Fragen niemals aufzutauchen; sondern eher pflegt die Relation zwischen  $y$  und  $x$  immer unbekannt zu sein, die erst daher zu bestimmen ist, dass die Variation verschwinden muss, worin sich natürlich die Methode der Maxima und Minima befindet. Es ist also gefällig, dass Fragen dieser Art so ausgesprochen werden, was für eine Relation zwischen den Größen  $x$  und  $y$  einhergehen muss, dass die Variation der vorgelegten Formel  $\int Zdx$  verschwinden muss, wie auch immer die neue Variable  $t$  in die Rechnung eingeführt wird. Wenn daher aber die Frage auf diese Weise gestellt wird, ist klar, dass den Formel  $(\frac{dy}{dt})$ ,  $(\frac{ddy}{dxdt})$ ,  $(\frac{d^3y}{dx^2dt})$  etc. keine bestimmten Werte zugeteilt werden können.

**§13** Aber hier kann ein völlig einzigartiger Kunstgriff zu Hilfe genommen werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, die letzten Formeln in §11 auf die Form der ersten zurückzuführen, sodass in allen dieselbe Formel  $(\frac{dy}{dt})$  auftaucht. Weil nämlich  $dx(\frac{ddy}{dxdt})$  das Differential der Formel  $(\frac{dy}{dt})$  für allein variabel genommenes  $x$  ist, wird durch die ähnliche Reduktion von Integralen gelten:

$$\int Pdx \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) = P \left( \frac{dy}{dt} \right) - \int dx \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right),$$

auf die gleiche Weise, weil  $dx(\frac{d^3y}{dx^2dt})$  das Differential der Formel  $(\frac{ddy}{dxdt})$  ist, werden wir sofort diese Reduktion haben

$$\int Qdx \left( \frac{d^3y}{dx^2dt} \right) = Q \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) - \int dx \left( \frac{dQ}{dx} \right) \left( \frac{ddy}{dxdt} \right),$$

nun wird aber durch die vorhergehende Reduktion sein

$$\int dx \left( \frac{dQ}{dx} \right) \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) = \left( \frac{dQ}{dx} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) - \int dx \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right),$$

und so werden wir insgesamt haben

$$\int Q dx \left( \frac{d^3 y}{dx^2 \cdot dt} \right) = Q \left( \frac{ddy}{dx \cdot dt} \right) - \left( \frac{dQ}{dx} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) + \int dx \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right),$$

und nun ist hinreichend klar, dass die folgende Integralformel so reduziert hervorgehen wird:

$$\begin{aligned} \int R dx \left( \frac{d^4 y}{dx^3 dt} \right) &= R \left( \frac{d^3 y}{dx^2 \cdot dt} \right) - \left( \frac{dR}{dx} \right) \left( \frac{ddy}{dx dt} \right) \\ &\quad + \left( \frac{ddR}{dx^2} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) - \int dx \left( \frac{d^3 R}{dx^2} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right), \end{aligned}$$

und wenn darüber hinaus eine solche Formel vorhanden wäre, wäre:

$$\begin{aligned} \int S dx \left( \frac{d^5 y}{dx^4 dt} \right) &= S \left( \frac{d^4 y}{dx^3 \cdot dt} \right) - \left( \frac{dS}{dx} \right) \left( \frac{d^3 y}{dx^2 dt} \right) + \left( \frac{ddS}{dx^2} \right) \left( \frac{ddy}{dx dt} \right) \\ &\quad - \left( \frac{d^3 S}{dx^3} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) + \int dx \left( \frac{d^4 S}{dx^4} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

**§14** Wenn wir daher nun diese reduzierten Formeln in den Ausdruck der gesuchten Variation der Formel  $\int Z dx$  einsetzen, dann wird diese Variation nicht nur aus Integralformeln bestehen, sondern auch absolute Teile enthalten, deren eine die Formel  $\left( \frac{dy}{dt} \right)$ , die anderen diese  $\left( \frac{ddy}{dx dt} \right)$ , wieder andere aber diese  $\left( \frac{d^3 y}{dx^2 dt} \right)$  etc. enthalten werden, während andererseits alle Integrale dieselbe Formel  $\left( \frac{dy}{dt} \right)$  involvieren, deshalb wird man die gesuchte Variation der vorgelegten Formel  $\int Z dx$  auf die folgende Weise ausgedrückt haben:

$$\begin{aligned} &dt \int dx \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( N - \left( \frac{dP}{dx} \right) + \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) - \left( \frac{d^3 R}{dx^3} \right) + \left( \frac{d^4 S}{dx^4} \right) - \text{etc.} \right) \\ &+ dt \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( P - \left( \frac{dQ}{dx} \right) + \left( \frac{ddR}{dx^2} \right) - \left( \frac{d^3 S}{dx^3} \right) + \text{etc.} \right) \\ &+ dt \left( \frac{ddy}{dx dt} \right) \left( Q - \left( \frac{dR}{dx} \right) + \left( \frac{ddS}{dx^2} \right) - \text{etc.} \right) \\ &+ dt \left( \frac{d^3 y}{dx^2 dt} \right) \left( R - \left( \frac{dS}{dx} \right) + \text{etc.} \right) \\ &+ dt \left( \frac{d^4 y}{dx^3 dt} \right) (S - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

§15 Obwohl mein Unterfangen hier nicht nicht ist, die Methode der Maxima und Minima zu behandeln, weil dies andernorts schon hinreichend ausführlich getan worden ist, kann ich es hier dennoch nicht auslassen, dass ich bemerke, wenn die Variation der Formel  $\int Zdx$  verschwinden wird, wie auch immer die neue Variable  $t$  in die Rechnung eingeführt wird, dass es auf keine Weise geschehen kann, wenn nicht der ganze erste Teil des Integrals einzeln verschwindet, woher es notwendig ist, dass zwischen  $x$  und  $y$  diese Gleichung festgelegt wird

$$0 = N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.},$$

und weil nun die Variable  $t$  nicht weiter auftritt und so nur noch die eine Variable  $x$  übrig ist, werden wir, wobei die Rechnungen weggelassen wurden, diese Gleichung haben

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.},$$

mit welcher die verlangte Relation zwischen  $x$  und  $y$  ausgedrückt wird. Aber die absoluten Teile werden nur auf die äußersten Terme bezogen, über welche die Dinge bemerkt werden müssen, die schon andernorts gründlicher gelehrt worden sind.

§16 Ich halte mich aber hier nicht mit diesen Fällen auf, in welchen die Größe  $Z$  selbst darüber hinaus Integralformeln involviert, weil ja auch dieser Gegenstand schon andernorts zu Genüge behandelt worden ist, sondern bringe hier um vieles mühevollere Arbeit auf, indem ich diese selbe Methode sogar auf Funktionen zweier Variablen auszudehnen versuchen werde, was ich einst in der Dissertation, welche ich über das Variationskalkül geschrieben hatte, zur damaligen Zeit nicht leisten konnte, bei der Menge so vieler Größen verschiedener Art.

## ANPASSUNG DER VORHERGEHENDEN METHODE AUF FUNKTIONEN ZWEIER VARIABLEN

§17 Wenn man irgendeine Gleichung zwischen den drei Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  hat und wir mit ihr die Natur einer gewissen Fläche ausgedrückt



zu werden festlegen, wo wir freilich die zwei Koordinaten  $x$  und  $y$  in einer horizontalen Ebene festgelegt zu werden verstehen wollen, die dritte  $z$  aber vertikal dazu, und so wird diese dritte wie eine Funktion der zwei  $x$  und  $y$  betrachtet werden können; daher tauchen auf gewohnte Weise zweifache zu betrachtende Zuwächse auf, sofern sie natürlich von der Variabilität von  $x$  oder von  $y$  entstehen. Jener Zuwachs von  $z$ , welcher aus der Variation von  $x$  entsteht, pflegt mit dieser Formel  $dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$ , diese aber, der aus der Variation von  $y$  entsteht, mit dieser  $dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$  gekennzeichnet zu werden.

**§18** Wenn daher nun diese mit einer Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und  $z$  ausgedrückte Fläche mit irgendwelchen anderen selbiger sehr nahen Oberflächen verglichen werden muss, wird dies am angenehmsten geschehen, indem die neue Variable  $t$  eingeführt wird, sodass nun  $z$  wie eine Funktion von drei Variablen  $x$ ,  $y$  und  $t$  zu betrachten ist, die für  $t = 0$  genommen in die obere Funktion übergehen wird, aber während  $t$  unendlich kleine Werte zugeteilt werden, alle sehr nahen Oberflächen erfassen wird, nach Festlegen wovon es ersichtlich ist, weil ja die Variablen  $x$  und  $y$  von der neuen  $t$  in keinsten Weise abhängen, sodass die Differentiale  $dx$  und  $dy$  auf keine Weise mit  $dt$  vermischt werden, und in der Tat kann allein die Koordinate  $z$  Zuwächse dreifacher Art erfahren; außer den zwei schon zuvor erwähnten, die entweder von  $x$  oder  $y$  ihren Ursprung haben, wird sie auch einen Zuwachs erhalten können, der aus der Variabilität von  $t$  entsteht, welcher mit einer solchen Formel  $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$  darzustellen ist.

**§19** Wir wollen nun festlegen, dass  $V$  ein irgendwie aus den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  zusammengesetzter Ausdruck ist, der entweder lediglich durch algebraische Operationen oder auch transzendente gebildet wurde, welcher auf gewohnte Weise differentiiert liefere

$$dV = Ldx + Mdy + Ndz,$$

und wenn der Zuwachs desselben, der von der neuen Variable  $t$  allein entstehe, verlangt wird, ist offenkundig, dass  $dx = 0$  und  $dy = 0$  gesetzt werden muss, aber anstelle von  $dz$  der Ausdruck  $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$  geschrieben werden muss, und so werden wir mit dieser gebrauchten Bezeichnungsweise haben

$$dt\left(\frac{dV}{dt}\right) = Ndt\left(\frac{dz}{dt}\right) \quad \text{und daher} \quad \left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Solche Ausdrücke legen aber wie zuvor die erste Gattung fest.

§20 Wir wollen also zur zweiten Art fortschreiten, in welcher der Ausdruck  $V$  außer den Koordinaten  $x, y, z$  selbst auch das Verhältniß derer Differentiale involviere; und hier muss vor allem die Form von Ausdrücken dieser Art sorgfältiger betrachtet werden. Weil ja aber hier sofort die GröÙe  $z$  zweifache Zuwächse erhalten kann (hier achten wir nämlich noch nicht auf die neue Variable  $t$ ), wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = p',$$

welche zwei Buchstaben Differentiale ersten Grades erfassen, darauf wollen wir für die Differentiale zweiten Grades festlegen:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = q, \quad \left(\frac{ddz}{dx dy}\right) = q', \quad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = q'',$$

woher es förderlich sein wird, die folgenden Relationen zwischen diesen Buchstaben und den vorhergehenden bemerkt zu haben:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) = q', \quad \left(\frac{dp'}{dy}\right) = q'';$$

auf die gleiche Weise wollen wir die Differentiale dritten Grades in diesen Formeln erfassen:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r, \quad \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) = r', \quad \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = r'', \quad \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r''',$$

wo diese Relationen zu bemerken sind:

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right), \quad r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right), \quad r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right), \quad r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right);$$

die vierten Differentiale aber liefern diese Formeln:

$$s = \left(\frac{d^4z}{dx^4}\right), \quad s' = \left(\frac{d^4z}{dx^3 dy}\right), \quad s'' = \left(\frac{d^4z}{dx^2 dy^2}\right), \quad s''' = \left(\frac{d^4z}{dx dy^3}\right), \quad s^{\text{iv}} = \left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)$$

und so weiter, wie weit es beliebt.

§21 Nachdem diese Dinge erklärt worden sind, können Ausdrücke der zweiten Art, außer den Koordinaten  $x, y$  und  $z$  selbst, auch die Größen  $p, p', q, q', q'', r, r', r'', r'''$  etc. wie auch immer involvieren, woher wir, wenn  $V$  irgendeinen Ausdruck dieser Art bezeichnet, sein Differential auf die gewohnte Weise genommen in folgender Form darbieten wollen:

$$\begin{aligned} dV = Ldx + Mdy + Ndz + Pdp + Qdq + Rdr \\ + P'dp' + Q'dq' + R'dr' \\ + Q''dq'' + R''dr'' \\ + R'''dr''' \end{aligned}$$

etc.,

welche Form es gefällig sein wird, dass sie sich eingepägt wird, damit es nicht nötig ist, sie öfter zu wiederholen.

§22 Wenn daher nun die Variation der Ausrücke oder der Zuwachs gefunden werden muss, welcher aus der Veränderung der neuen Variable  $t$  entsteht, die wir in den Wert der Koordinate  $z$  einführen, haben wir schon gesehen, dass  $dx = 0$  und  $dy = 0$  genommen werden muss, dann aber  $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$  wird, und wegen desselben Grundes werden die folgenden Differentiale auf die gleiche Weise auszudrücken sein, die sich mit ihren per se hinreichend klaren Transformationen so verhalten werden:

$$\begin{aligned} dp &= dt \left( \frac{dp}{dt} \right) = dt \left( \frac{ddz}{dxdt} \right), & dp' &= dt \left( \frac{dp'}{dt} \right) = dt \left( \frac{ddz}{dydt} \right), \\ dq &= dt \left( \frac{dq}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^3z}{dx^2dt} \right), & dq' &= dt \left( \frac{dq'}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^3z}{dxdydt} \right), \\ & & dq'' &= dt \left( \frac{dq''}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^3z}{dy^2dt} \right), \\ dr &= dt \left( \frac{dr}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^4z}{dx^3dt} \right), & dr' &= dt \left( \frac{dr'}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^4z}{dy^2dydt} \right), \\ dr'' &= dt \left( \frac{dr''}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^4z}{dxdy^2dt} \right), & dr''' &= dt \left( \frac{dr'''}{dt} \right) = dt \left( \frac{d^4z}{dy^3dt} \right) \end{aligned}$$

etc.

Die ganze Aufgabe führt also darauf zurück, dass in jener Differentialformel, die für  $dV$  gegeben wurde, anstelle der einzelnen Differentialwerte diese Werte

eingesetzt werden und auf diese Weise wird die Variation des Ausdruckes  $V$  hervorgehen, die allein aus der Variabilität von  $t$  oder den Wert der Formel  $dt(\frac{dV}{dt})$  entsteht, weil ja aber die einzelnen Glieder mit dem Element  $dt$  behaftet sein werden, erhalten wir, nachdem es weggelassen wurde, die folgende Form:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right) = & N\left(\frac{dz}{dt}\right) + P\left(\frac{ddz}{dxdt}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2 \cdot dt}\right) + R\left(\frac{d^4z}{dx^3 \cdot dt}\right) \\ & + P'\left(\frac{ddz}{dydt}\right) + Q'\left(\frac{d^3z}{dx dy dt}\right) + R'\left(\frac{d^4z}{dx^2 dy dt}\right) \\ & + Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2 \cdot dt}\right) + R''\left(\frac{d^4z}{dx dy^2 dt}\right) \\ & + R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3 \cdot dt}\right), \end{aligned}$$

die, um die Variationen irgendwelcher Ausdrücke der zweiten Art zu finden, genügt.

**§24** Nun werden wir die Ausdrücke der dritten Art angeben können, die Integralformeln involvieren und in denen hauptsächlich die Tragweite dieser Methoden wahrgenommen wird. Wann immer nämlich die Frage über Maxima und Minima, die bei Flächen auftauchen können, geht, ist jene Formel, die zum Maximum oder Minimum gemacht werden muss, notwendigerweise eine Integralformel und daher sogar eine Doppelintegralformel, deren Gestalt es gefällig ist, hier ein wenig erklärt zu werden. Wie nämlich im vorhergehenden Teil einfache Integralformel betrachtet worden sind, die auf die gegebene Abszisse  $x$  bezogen worden sind, so sind hier, bei Oberflächen, die Fragen immer nicht nur auf die Abszisse  $x$ , sondern auf einen ganzen gewissen Raum in der horizontalen Ebene als Basis zu beziehen, über welchem ein Anteil der Oberfläche, der sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut, hervorragt. Daher, weil eine solche Basis zwei Dimensionen hat, die eine von  $x$ , die andere von  $y$  abhängig, werden Formeln dieser Art Doppelintegrale sein, die auf diese Weise  $\iint V dx dy$  ausgedrückt zu werden pflegen; sie erfordern natürlich eine zweifache Integration, und in der ersten wird allein die Koordinate  $x$ , in der zweiten allein die Koordinate  $y$  für die Variable gehalten, und die Integration wird bis zu den Grenzen der vorgelegten Basis erstreckt, dann aber wird auch erst die eine Variable angenommen

und die andere Integration durchgeführt. Und weil es ja völlig egal ist, welche der beiden zuerst für die Variable gehalten wird, kennzeichnen wir ohne einen Unterschied jene zweifache Integration mit diesem Doppelzeichen  $\iint$ ; aber hier ist nicht der Ort, alles, was über Doppelintegrationen dieser Art zu bemerken ist, genauer zu erläutern, welcher Gegenstand natürlich in Tomo XIV dieser Kommentare schon hinreichend sorgsam behandelt wurde.

**§25** Wenn daher also eine Variation einer Integralformel dieser Art  $\iint V dx dy$  gesucht werden muss, wo  $V$  irgendeinen Ausdruck entweder der ersten oder der zweiten Art bezeichnet, ist aus dem oberen hinreichend klar, dass diese Variation so ausgedrückt werden wird

$$dt \iint \left( \frac{dV}{dt} \right) dx dy,$$

welche Form wiederum ein Doppelintegral ist und, je nachdem ob entweder  $x$  oder  $y$  in der ersten Integration wie eine Konstante betrachtet wird, die Formel entweder auf diese Weise

$$dt \int dx \int \left( \frac{dV}{dt} \right) dy$$

oder auf diese Weise

$$dt \int dy \int \left( \frac{dV}{dt} \right) dx$$

dargeboten werden kann.

**§26** Es sei nun  $V$  ein solcher Ausdruck, wie wir ihn oben in §19 beschrieben haben und dessen Variation oder Wert  $\left( \frac{dV}{dt} \right)$  wir in §23 entwickelt haben, es wird nämlich nur von Nöten sein, die einzelnen dort erläuterten Glieder an dieser Stelle  $\left( \frac{dV}{dt} \right)$  einzusetzen; daher wird die folgende Masse an Integralformeln entstehen, nach Zusammennehmen von welchen die gesuchte Variation  $dt \iint \left( \frac{dV}{dt} \right) dx dy$  so ausgedrückt werden wird

$$\begin{aligned} dt \iint N \left( \frac{dz}{dt} \right) dx dy &+ dt \iint P \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) dx dy + dt \iint Q \left( \frac{d^3 z}{dx^2 dt} \right) dx dy + dt \iint R \left( \frac{d^4 z}{dx^3 dt} \right) dx dy \\ &+ dt \iint P' \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) dx dy + dt \iint Q' \left( \frac{d^3 z}{dx dy dt} \right) dx dy + dt \iint R' \left( \frac{d^4 z}{dx^2 dy dt} \right) dx dy \\ &+ dt \iint Q'' \left( \frac{d^3 z}{dy^2 dt} \right) dx dy + dt \iint R'' \left( \frac{d^4 z}{dx dy^2 dt} \right) dx dy \\ &+ dt \iint R''' \left( \frac{d^4 z}{dy^3 dt} \right) dx dy \end{aligned}$$

etc.

**§27** Nun lassen diese einzelnen Glieder nach dem ersten spezielle Reduktionen zu, die es förderlich sein wird bemerkt zu haben. Für das zweite Glied wollen wir zuerst nur  $x$  für die Variable nehmen und es wird sein

$$\int P \left( \frac{ddz}{dxdt} \right) dx = P \left( \frac{dz}{dt} \right) - \int \left( \frac{dz}{dt} \right) dx \left( \frac{dP}{dx} \right),$$

woher, indem auch die andere Integration hinzugefügt wird, gelten wird

$$\iint P \left( \frac{ddz}{dxdt} \right) dx dy = \int P \left( \frac{dz}{dt} \right) dy - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dP}{dx} \right) dx dy.$$

Für das dritte Glied werde zuerst allein  $y$  für die Variable genommen und es wird sein

$$\int P' \left( \frac{ddz}{dy \cdot dt} \right) dy = P' \left( \frac{dz}{dt} \right) - \int \left( \frac{dz}{dt} \right) dy \left( \frac{dP'}{dy} \right),$$

woher das dritte Glied selbst in dieses übergehen wird

$$\iint P' \left( \frac{ddz}{dydt} \right) dx dy = \int P' \left( \frac{dz}{dt} \right) dx - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dP'}{dy} \right) dx dy.$$

**§28** Für die folgenden Glieder werden diese Reduktionen selbst zu folgenden Transformationen, für das vierte werden wir natürlich aus dem zweiten haben

$$\iint Q \left( \frac{d^3z}{dx^2dt} \right) dx dy = \int Q \left( \frac{ddz}{dxdt} \right) dy - \iint \left( \frac{ddz}{dxdt} \right) \left( \frac{dQ}{dx} \right) dx dy,$$

aber in der Tat wird dieses letzte Glied ähnlich zum zweiten auf diese Weise reduziert, wo nur  $\left( \frac{dQ}{dx} \right)$  anstelle von  $P$  geschrieben werden muss:

$$\int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dQ}{dx} \right) dy - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) dx dy,$$

sodass das vierte Glied nun diese Form liefert:

$$\int Q \left( \frac{ddz}{dxdt} \right) dy - \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dQ}{dx} \right) dy + \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) dx dy.$$

Auf die gleiche Weise wird das fünfte Glied mit Hilfe des zweiten reduziert, sobald  $Q'$  anstelle von  $P$  und  $\left(\frac{d^3z}{dx dy dt}\right)$  anstelle von  $\left(\frac{ddz}{dx dt}\right)$ , oder indem  $\left(\frac{ddz}{dy dt}\right)$  anstelle von  $\left(\frac{dz}{dt}\right)$  geschrieben wird und man wird so haben

$$\iint Q' \left( \frac{d^3z}{dx dy dt} \right) dx dy = \int Q' \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) dy - \iint \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) \left( \frac{dQ'}{dx} \right) dx dy,$$

welches letzte Glied mit dem dritten verglichen werde, wo anstelle von  $P'$  nur  $\left(\frac{dQ'}{dx}\right)$  geschrieben werden muss, wonach das ganze Glied diese Form annehmen wird:

$$\int Q' \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) dy - \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dQ'}{dx} \right) dx + \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddQ'}{dx dy} \right) dx dy,$$

das sechste Glied wird aber zweimal mit dem zweiten verglichen auf diese Form zurückgeführt:

$$\int Q'' \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) dx - \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{dQ''}{dy} \right) dx + \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddQ''}{dy^2} \right) dx dy,$$

die folgenden Glieder, zunächst das siebte Glied, wird in die folgenden Teile aufgelöst:

$$\begin{aligned} \int R \left( \frac{d^3z}{dx^2 dt} \right) dy - \int \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) \left( \frac{dR}{dx} \right) dy + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR}{dx^2} \right) dy \\ - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{d^3R}{dx^3} \right) dx dy, \end{aligned}$$

darauf das achte Glied

$$\begin{aligned} \int R' \left( \frac{d^3z}{dx dy dt} \right) dy - \int \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) \left( \frac{dR'}{dx} \right) dx + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR'}{dx dy} \right) dy \\ - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{d^3R'}{dx^2 dy} \right) dx dy, \end{aligned}$$

dann wird das neunte Glied werden

$$\begin{aligned} \int R'' \left( \frac{d^3z}{dx dy dt} \right) dx - \int \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) \left( \frac{dR''}{dy} \right) dy + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR''}{dx dy} \right) dx \\ - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{d^3R''}{dx dy^2} \right) dx dy, \end{aligned}$$

und das zehnte

$$\int R''' \left( \frac{d^3 z}{dy^2 dt} \right) dx - \int \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) \left( \frac{dR'''}{dy} \right) dx + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR'''}{dy^2} \right) dx \\ - \iint \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{d^3 R'''}{dy^3} \right) dx dy.$$

§29 Wir wollen nun alle diese Formeln zu einer Summe sammeln, und die gesuchte Variation wird aus mehreren Gliedern bestehen, deren erstes Doppelintegralformeln, die übrigen aber einfache umfassen werden, und auf diese Weise wird die gesuchte Variation auf die folgende Weise ausgedrückt sein:

$$dt \iint dx dy \left( \frac{dz}{dt} \right) \left\{ \begin{array}{l} N - \left( \frac{dP}{dx} \right) + \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) - \left( \frac{d^3 R}{dx^3} \right) \\ - \left( \frac{dP'}{dy} \right) + \left( \frac{ddQ'}{dx dy} \right) - \left( \frac{d^3 R'}{dx^2 dy} \right) \\ + \left( \frac{ddQ''}{dy^2} \right) - \left( \frac{d^3 R''}{dx dy^2} \right) \\ - \left( \frac{d^3 R'''}{dy^3} \right) \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \\ + dt \left\{ \begin{array}{l} + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) P dy + \int Q dy \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) - \int dy \left( \frac{dQ}{dx} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right) + \int R dy \left( \frac{d^3 z}{dx^2 dt} \right) \\ + \int \left( \frac{dz}{dt} \right) P' dx + \int Q' dy \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) - \int dx \left( \frac{dQ'}{dx} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right) + \int R' dy \left( \frac{d^2 z}{dx dy dt} \right) \\ + \int Q'' dx \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) - \int dx \left( \frac{dQ''}{dy} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right) + \int R'' dx \left( \frac{d^3 z}{dx dy dt} \right) \\ + \int R''' dx \left( \frac{d^3 z}{dy^2 dt} \right) \\ - \int dy \left( \frac{dR}{dx} \right) \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) + \int dy \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR}{dx^2} \right) \\ - \int dx \left( \frac{dR'}{dx} \right) \left( \frac{ddz}{dx dt} \right) + \int dy \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR'}{dx dy} \right) \\ - \int dy \left( \frac{dR''}{dy} \right) \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) + \int dx \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR''}{dx dy} \right) \\ - \int dx \left( \frac{dR'''}{dy} \right) \left( \frac{ddz}{dy dt} \right) + \int dx \left( \frac{dz}{dt} \right) \left( \frac{ddR'''}{dy^2} \right) \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$



§30 Aber was diese einzelnen Glieder eigentlich bezeichnen und wie sie zum Nutzen verwendet werden können, lässt noch keineswegs erkennen, woher dieser Gegenstand, dessen Fundamente immer noch als kaum errichtet anzusehen sind, die ganze Aufmerksamkeit der Geometer und eine um vieles genauere Untersuchung zu erfordern scheint, welche Aufgabe sich kaum vorher in Angriff nehmen lässt, bis einige Spezialfälle mit aller Klarheit und Sorgfalt entwickelt worden sind, ja sogar der erste Teil selbst, der sich nur mit Funktionen einer Variablen befasst, ist bis jetzt noch keinesfalls hinreichend klar und sorgfältig erklärt worden, sodass wir besonders die wahre Gestalt und die Natur der einzelnen Teile verstünden, in welchen wir die Variation enthalten zu sein gefunden haben, zu welchem Zweck es ratsam scheint, die folgenden Erklärungen hier anzufügen.

## ERKLÄRUNGEN ÜBER DIE AN FUNKTIONEN ZUMINDEST EINER VARIABLEN ANGEPASSTE THEORIE DER VARIATIONEN

§31 Es ist möglich, Fragen, welche sich hier zeigen, auf dieses allgemeine Problem zurückzuführen:

### *Erklärung dieses Problems*

*Wenn  $y$  irgendeine Funktion von  $x$  war, und daher der Wert einer gewissen gegebenen Integralformel  $\int Zdx$  bestimmt wird, während  $Z$  einen Ausdruck bezeichnet, der aus diesen Größen  $x$  und  $y$  und Verhältnissen von deren Differentialen zusammengesetzt worden ist, ist die Frage, wenn anstelle jener Funktion  $y$  irgendeine andere jener sehr nahe oder von ihr nur unendlich wenig abweichende verwendet wird, einen um wie viel größeren oder kleineren Wert dann dieselbe Integralformel  $\int Zdx$  erhalten wird.*

§32 Aber weil auf diese Weise diese gestellte Frage allzu losgelöst vom praktischen zu sein scheint, wollen wir sie auf gewohnte Weise auf die Geometrie zurückführen. Es sei also über der Achse  $AP$  (Fig. 1) irgendeine Kurve  $AM$  vorgelegt, die mit einer Gleichung zwischen der Abszisse  $AP = x$  und der

§33 Damit diese Dinge klarer werden, wollen wir ein gewisses Beispiel vortragen, in welchem nach Vorlegen der Kurve  $AM$  und Betrachtung ihrer Achse  $AP$  als Vertikale die Zeit gesucht wird, in welcher ein Körper, der vom Punkt  $A$  aus über dieser Kurve  $AM$  herabgleitet, bis hin zum Punkt  $M$  gelangt. Weil nun die Geschwindigkeit des Körpers in  $M$  ist wie  $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$  und das Kurvenelement selbst gleich  $dx\sqrt{1+pp}$  ist, nachdem natürlich  $dy = p dx$  gesetzt wurde, wie es in der allgemeinen Lösung vorgeschrieben wurde, wird es die Zeit durch das Element  $Mm$  hindurch gleich  $dx \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$  sein, woher die Integralformel  $\int Z dx$  für diesen Fall in  $\int dx \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$  übergeht, sodass man

$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$  hat, woher nun die Zeit zu bestimmen sein wird, in welcher der Körper, der über irgendeine sehr ähnlichen Kurve  $\alpha\mu$  herabgleitet, von  $\alpha$  bis hin zu  $\mu$  gelangen wird, wo der Unterschied die Variation selbst der Formel  $\int dx \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$  geben wird, die diesem Fall entspricht.

§34 Weil ja hier eine Integralformel betrachtet werden muss, ist vor allem zu untersuchen, wie sie bestimmt werden muss. In erwähnten Beispiel ist es freilich klar, dass das Integral  $\int \frac{dx \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$  der Formel so genommen werden muss, dass es für  $x = 0$  gesetzt verschwindet, woher auch im Allgemeinen einzusehen wird, dass für die Integration der Formel  $\int Z dx$  eine gewisse andere Grenze wie beispielsweise der Punkt  $A$  als Anfang der Integrationsgrenze festgelegt werden muss und das Integral  $\int Z dx$  verschwinden muss, nachdem  $x = 0$  gesetzt wurde, oder wenn unter Umständen die Begebenheiten ganz anderer Natur waren, indem  $x$  ein gewisser gegebener Wert zugeteilt wird und darauf aber der Anfang festgelegt wurde, wird der Wert der Formel  $\int Z dx = W$  der Abszisse  $AP = x$  entsprechen.

§35 Nach Bemerken dieser Dinge über die Integralformel  $\int Z dx$  wollen wir sehen, welche Anschauung wir über jene sehr nahen Kurven  $\alpha\mu$  entwickeln müssen. Und zuerst ist freilich klar, dass diese Kurven immer in einem gewissen Verlauf gezogen werden müssen, sodass in ihnen nie ein Sprung der Winkels oder des anderen entdeckt werde; nachdem allein dies bemerkt wurde, ist es egal, ob diese Kurven in einem gewissen Gesetz der Fortsetzung oder einer gewissen Gleichung enthalten sind oder ob sie sogar unstetig sind, quasi freihändig gezeichnet.

§36 Gekrümmte Linien dieser Art können am angenehmsten auf diese Weise visualisiert werden. Es werde natürlich nach Belieben irgendeine gekrümmte Linie  $BN$ , die derselben Abszisse  $AP$  entspricht, gezeichnet, und nachdem zu den einzelnen Punkten  $X$  die Ordinaten  $XYV$  gezeichnet wurden, werden die Intervalle  $YV$  im Verhältnis etwas Endlichem zum unendlich Kleinen in  $v$  geschnitten, sodass  $Yv$  quasi ein infinitesimaler Anteil des Intervalls  $YV$  wird. Auf diese Weise wird nämlich die Kurve  $\alpha v \mu$  erhalten werden, die von der vorgelegten Kurve  $AM$  in allen Punkten nur unendlich wenig entfernt

ist, wie wir es für unser Unternehmen verlangen. Außerdem ist dennoch zu bemerken, dass in jener beliebigen Kurve  $BN$  die Tangente zur Achse  $AP$  nie normal sein darf, weil auf diese Weise die Teilung jener Intervalle gestört werden würde. Und nun ist es ersichtlich, dass nicht nur die Intervalle  $Y\nu$  unendlich klein sind, sondern auch die Tangenten in den Punkten  $Y$  und  $\nu$  nur unendlich wenig davon abweichen zueinander parallel zu sein.

### *Erklärung des ersten Teils in der Variation*

§37 Nachdem diese Dinge über die Vorlage der Frage an sich angemerkt worden sind, wollen wir genauer auch jene oben gefundene Lösung betrachten, und wollen ihre einzelnen Anteile, was ein beliebiger von ihnen bedeutet und wie er zum Nutzen gebraucht werden muss, besonders verstehen; die oben in §14 gegebene Lösung werden wir aber hier betrachten. Wir wollen nämlich sofort den ersten Teil der dort gefundenen Variation anschauen, der in dieser Integralformel enthalten ist

$$dt \int dx \left( \frac{dy}{dx} \right) \left( N - \left( \frac{dP}{dx} \right) + \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) - \left( \frac{d^3R}{dx^3} \right) + \left( \frac{d^4S}{dx^4} \right) - \text{etc.} \right),$$

deren Integration so aufgefasst werden muss, dass sie für die untere Integrationsgrenze  $A$  verschwindet, mit welcher Bedingung also die beliebige Konstante bestimmt wird; wenn daher also in den einzelnen Punkten  $XY$  diese Formel angewandt verstanden wird, wird das Aggregat all dieser Elementarformeln vom Anfang  $A$  bis hin zur Grenze  $M$  erstreckt den ersten Teil der gesuchten Variation liefern, und hier ist freilich in der Figur ersichtlich, dass der kleine Raum  $Y\nu$  einen Zuwachs der Ordinate  $y$  ausdrückt, der allein aus der Variable  $t$  entsteht, sodass  $Y\nu = dt \left( \frac{dy}{dt} \right)$  ist.

§38 Dieser erste Teil der Variation involviert also alle Abschnitte  $Y\nu$ , die innerhalb der Grenzen  $A$  und  $M$  enthalten sind, weil welche ins Unendliche variiert werden können und daher vom Positiven ins Negative übergehen können, können hier die größten Veränderungen auftreten. Aber dennoch muss davon der eine Fall ausgenommen werden, in welchem  $AM$  so beschaffen ist, dass gilt

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.},$$

dann waren nämlich irgendwelche sehr nahen Kurven so beschaffen, dass der erste Teil der Variation immer verschwindet. Und auch das Abweichen der sehr nahen Kurven  $\alpha\mu$  von der grundlegenden  $AM$  innerhalb der Grenzen  $A$  und  $M$  trägt etwas zur Variation bei; daher ist diese Kurve in Bezug auf die Integralformel  $\int Zdx$  besonders bemerkenswert, weil ja in ihr diese Integralformel den entweder maximalen oder minimalen Wert enthält.

### *Erklärung des zweiten Teils in der Variation*

**§39** Wir wollen nun zum zweiten Teil der oben gefundenen Variation fortschreiten, diese ist

$$dt \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

über welche ich zuerst bemerke, weil sie ja auf die Grenze  $M$  bezogen wird, dass durch in üblicher Weise ausgeführter Integration darüber hinaus ein ähnlicher Ausdruck, der auf die erste Grenze  $A$  bezogen wurde, aber mit dem entgegengesetztem Vorzeichen behaftet ist, hinzugefügt werden muss, was freilich daher notwendig ist, dass für  $x = 0$  gesetzt auch dieser Ausdruck völlig beseitigt wird. Es wird aber dieser Teil

$$dt \left( \frac{dy}{dx} \right) \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$

einmal auf die letzte Grenze  $M$  bezogen, wo  $dt(\frac{dy}{dt})$  selbst den kleinen Abschnitt  $M\mu$  ausdrückt, und auf die gleiche Weise wird in dem anderen Teil für den Anfang  $A$  der winzig kleine Abschnitt  $A\alpha$  eingehen. Daher ist es klar, wenn alle sehr nahen Kurven  $\alpha\mu$  durch diese beiden Grenzen  $A$  und  $M$  gezogen werden, dass dann die Variation des zweiten Teils verschwindet.

**§40** Wir wollen aber den Fall betrachten, in welchen die sehr nahe Kurve  $\alpha\mu$  durch die erste Grenze  $A$  zwar hindurch geht, aber nicht auch durch die andere  $M$ , sondern der Punkt  $\mu$  ihre Grenze ist, und die aus dem zweiten Teil entstandene Variation wird sein

$$= M\mu \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Und daher werden wir auch die Variation bestimmen können, die aus derselben Quelle entspringt, wenn die sehr nahe Kurve  $A\mu$  nicht im Punkt  $\mu$ , sondern in irgendeinem anderen  $w$  begrenzt wird, während das Intervall  $\mu w$  immer unendlich klein ist. Nachdem nämlich die Ordinate  $wmp$  gezogen wurde, muss die gerade gefundene Variation um das Stück der Formel  $\int Z dx$  vermehrt werden, die dem Element  $Pp = dx$  entspricht, weil welches Stück gleich  $Z \cdot Pp$  wird, wird für den Bogen der sehr nahen Kurve  $Aw$  die Variation, die aus dem zweiten Teil entsteht, diese sein

$$= M\mu \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right) + Z \cdot Pp.$$

§41 Es werde die Gerade  $Mw$  gezogen und wir wollen den Winkel  $wMm$  suchen, welchen diese Gerade  $Mw$  mit der anfänglichen Kurve festlegt, dieser Winkel werde  $wMm = w$  gesetzt und nachdem die zu  $Pp$  parallele Gerade  $MO$  gezogen wurde, weil sie fast gleich  $mw = M\mu$  und der Tangens des Winkels  $mMo = p$  und daher  $om = p \cdot Pp$  ist, wird man  $ow = M\mu + p \cdot Pp$  haben, woher wird

$$\tan wMo = \frac{M\mu}{Pp} + p,$$

und daher wird berechnet

$$wMm = \tan w = \frac{M\mu}{Pp(1 + pp) + M\mu \cdot p}.$$

Wir wollen nun in der Rechnung diesen Winkel  $w$  beibehalten und werden daher diesen kleinen Abschnitt erhalten

$$M\mu = \frac{Pp(1 + pp) \tan w}{1 - p \tan w},$$

nach Einsetzen welches Wertes die Variation für den Bogen  $Aw$  sein wird:

$$Pp \left( Z + \frac{(1 + pp) \tan w}{1 - p \tan w} \cdot \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right) \right).$$

§42 Nun wird es der Mühe Wert sein, den Winkel  $w$  zu bestimmen, sodass diese Variation verschwindet, was geschehen wird, wenn man nimmt

$$\tan w = \frac{Z}{pZ - (1 + pp) \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right)},$$

daher wird, nachdem dieser Winkel so festgelegt wurde, für alle irgendwo auf der Gerade  $Mw$  begrenzten sehr nahen gekrümmten Linien die Variation, die aus dem zweiten Teil entsteht, verschwinden. Es versteht hier ein in Bezug auf die übrigen ganz und gar bemerkenswerter Fall betrachtet zu werden, in welchem die Gerade  $Mw$  zur grundlegenden Kurve im Punkt  $M$  normal wird, was passiert, wenn galt

$$pZ - (1 + pp) \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right) = 0,$$

mit welcher Gleichung eine gewisse Bedingung der Integralformel  $\int Zdx$  oder die Gestalt des Ausdruckes  $Z$  bestimmt wird.

§43 Nicht wird es also verdrießt, einen solchen Ausdruck  $Z$  zu untersuchen, und zuerst ist freilich klar, dass er außer den Koordinaten  $x$  und  $y$  auch die Größe  $p$  involvieren muss. Wir wollen aber außerdem annehmen, dass in  $Z$  nicht die Buchstaben  $q, r$  etc. eingehen, sodass  $Q = 0, R = 0$  wird, und unsere aufzulösende Gleichung wird sein

$$pZ = (1 + pp)P,$$

wo zu bemerken ist, dass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

woher, wenn die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  als konstant behandelt werden, gelten wird

$$dZ = Pdp \quad \text{und daher} \quad P = \frac{dZ}{dp},$$

nachdem welcher Wert dort eingeführt wurde, diese Gleichung hervorgehen wird

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{pdp}{1 + pp},$$

die integriert gibt

$$\ln Z = \ln \sqrt{1 + pp} + \ln C,$$

welche Konstante irgendeine Funktion von  $x$  und  $y$  sein kann, eine solche Funktion sei  $C$  und wir werden haben

$$Z = V \sqrt{1 + pp}$$

und daher die Integralformel gleich

$$\int V dx \sqrt{1 + pp}.$$

Die Bedeutung dieser Formel kann ziemlich elegant durch die Zeit, in welcher ein gewisser Körper durch die Kurve  $AM$  hindurch bewegt wird, ausgedrückt werden. Wenn nämlich die Geschwindigkeit im Punkt  $M$  gleich  $\frac{1}{V}$  war, das heißt wenn die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten proportional war, also irgendeiner Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $y$ , dann drückt

$$V dx \sqrt{1 + pp}$$

das Element der Zeit aus und daher die Formel

$$\int V dx \sqrt{1 + pp}$$

die ganze Zeit, in welcher der Körper von  $A$  zu  $M$  gelangt.

#### *Erklärung des dritten Teils in der Variation*

§44 Was aber den dritten Teil der Variation betrifft, natürlich

$$dt \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) \left( Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} \right),$$

dieser tritt nicht auf, wenn nicht der Ausdruck  $Z$  auch Differentiale zweiten Grades involviert, was freilich sehr selten zu passieren pflegt. Hier ist aber zu bemerken, weil ja  $M\mu = dt \left( \frac{dy}{dt} \right)$  ist, dass für das folgende Element gelten wird

$$mw = dt \left( \frac{dy}{dt} \right) + dt dx \left( \frac{ddy}{dxdt} \right),$$

woher berechnet wird

$$dt \left( \frac{ddy}{dxdt} \right) = \frac{mw - M\mu}{dx} = \frac{Mw - M\mu}{Pp},$$

mit welcher Formel die Abweichung der Richtung  $\mu w$  von der Richtung  $Mm$  ausgedrückt wird, die freilich, wie wir schon zuvor bemerkt haben, immer möglichst klein ist.



§45 Wenn daher also die Tangente in  $\mu$  der Tangente in  $M$  vollkommen parallel war, was passiert, wenn auch in der Begleitkurve  $BN$  die Tangente zu  $N$  dieser parallel war, dann verschwindet die Variation, die aus dem dritten Teil entsteht, völlig, was auch über die Anfangsgrenze zu verstehen ist, wenn die Tangenten in  $A$  und  $B$  zueinander parallel waren, und daher wird schon erkannt, damit die Variationen, die aus dem vierten Teil entstehen, verschwinden, dass es nötig ist, dass zusätzlich die Krümmungsradien in den Punkten  $M$  und  $\mu$  gleich werden.

§46 Und aus diesen Erläuterungen ist schon zu Genüge klar, dass aus dem zweiten Teil entstehende Variationen verschwinden, wenn alle sehr nahen Kurven  $\alpha\mu$  durch jede der beiden Grenzen  $M$  und  $A$  gezogen werden. Darauf aber auch die Variationen des dritten Teils, wenn alle sehr nahen Kurven zugleich in jeder der beiden Grenzen  $A$  und  $M$  mit der grundlegenden Kurve  $AM$  gemeinsame Tangenten haben. Außerdem verschwinden aber auch die Variationen des vierten Teils, wenn alle sehr nahen Kurven in  $A$  und  $M$  darüber hinaus in Bezug auf die Krümmung mit der anfänglichen Kurve übereinstimmen. Hier wird es aber förderlich sein zu erinnern, dass die Variationen des dritten Teils per se verschwinden, wenn nur die Größe  $Z$  keine Differentiale zweiten Grades involviert, aber die des vierten Teils immer verschwinden, wenn keine Differentiale dritten Grades in die Größe  $Z$  eingehen, und so weiter. Daher, weil wir am Anfang gezeigt haben, wie die Variation des ersten Teils zu Null zu machen ist, sehen wir auf sehr klar Weise ein, dass unter gewissen Bedingungen alle Teile der Variation zugleich verschwinden.

## ERKLÄRUNGEN ÜBER KURVEN, DIE MIT DER EIGENSCHAFT DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS VERSEHEN SIND

§47 Wenn die Integralformel  $\int Zdx$  in der gesuchten Kurve entweder ein Maximum oder Minimum sein muss, haben wir schon oben gezeigt, dass für

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

gesetzt die Natur dieser Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt wird

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

welche Gleichung, wenn nicht die Größen  $P, Q, R$  verschwinden oder konstant sind, immer eine differentiale entweder zweiten oder vierten oder sechsten oder eines anderen geraden Grades ist. Hier taucht also sofort das bemerkenswerte Phänomen auf, dass diese Gleichung niemals eine entweder einfache oder eine differentiale dritten oder fünften oder eines anderen ungeraden Grades wird, was wir bald noch klarer erläutern werden.

§48 Sich hierauf beziehende Fragen werden also selbst in verschiedene für den Grad der Differentiale aufgeteilt, zu welchem die Gleichungen aufsteigen, weil ja von diesem Grad die Natur der Lösung in höchstem Maße abhängt, deshalb weil sie immer genauso viele beliebige Konstanten involviert. Zur ersten Klasse zählen wir also die Fälle, in denen die Gleichung für das Maximum oder Minimum vollkommen endlich ist. Zur zweiten Klasse aber die, in denen diese Gleichung eine differentiale zweiten Grades wird, zur dritten die, in denen die Gleichung zum vierten Grad ansteigt und so weiter, welche einzelnen Klassen wir der Reihe nach beschreiben wollen.

### 1. Klasse

Zur Lösung der ersten Klasse führt die Formel  $\int Zdx$  sofort, wann immer der Ausdruck  $Z$  nur durch die Koordinaten  $x$  und  $y$ , nachdem die Verhältnisse aller Differentiale ausgeschlossen wurden, bestimmt wird, weil nämlich in diesem Fall einfach wird

$$dZ = Mdx + Ndy,$$

werde die Gleichung für die Kurve des Maximums oder Minimums  $N = 0$  sein, welche Gleichung also ganz und gar bestimmt ist, und daher die einzige genügende Kurve in ihrer Art sein wird. Wie wenn beispielsweise die Linie gesucht wird, in welcher der Wert der Formel  $\int dx(2xy - yy)$  maximal oder minimal wird, wird, wegen  $Z = 2xy - yy$  und daher  $N = 2(x - y)$  die gesuchte Gleichung  $x - y = 0$  sein, oder die gesuchte Linie wird eine Gerade sein, die zur Achse in einem halben rechten Winkel geneigt ist, für welche

also der Wert der vorgelegten Integralformel  $\frac{x^3}{3}$  ist, der natürlich kleiner ist, als wenn irgendeine andere gekrümmte Linie natürlich für dieselbe Abszisse genommen werden würde.

§49 Mit diesen Fällen wird die erste Klasse aber noch nicht erschöpft, sondern es sind auch noch andere gegeben, die genauso auf endliche Gleichungen führen, um was zu zeigen,  $\mathfrak{Z}$  irgendeine Funktion von  $x$  und  $y$  sei und  $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy$ , und nun werde  $Z = \mathfrak{Z}p$  gesetzt und es wird  $M = \mathfrak{M}p$ ,  $N = \mathfrak{N}p$ ,  $P = \mathfrak{Z}$  sein, woher, damit die Formel  $\int Zdx$  ein Maximum oder Minimum wird, diese Gleichung gefunden wird

$$0 = \mathfrak{N}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{N}p - \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{N} \cdot dy}{dx} = -\mathfrak{M},$$

die ebenso eine endliche Gleichung ist. Das hätte sich auch sofort vorhersehen lassen, weil nämlich  $pdx = dy$  ist, und diese Integralformel  $\int \mathfrak{Z}dy$  unterscheidet sich von der vorhergehenden  $\int Zdx$  nicht anders, außer dass die Koordinaten  $x$  und  $y$  vertauscht worden sind, woher das, was über die erste bestätigt wurde, auch über die zweite gilt.

Daher kann die Natur der ersten Klasse noch allgemeiner so beschrieben werden, dass die alle Integralformeln dieser Art umfasst  $\int (Z + \mathfrak{Z}p)dx$ , wo die Buchstaben  $Z$  und  $\mathfrak{Z}$  irgendwelche Funktionen von  $x$  und  $y$  bezeichnen, dann wird nämlich die Gleichung für die Kurve des Maximums oder Minimums sein

$$0 = N - \mathfrak{M},$$

welche Gleichung ganz und gar bestimmt ist.

## 2. Klasse

§50 Zur zweiten Klasse zählen wir die Integralformeln  $\int Zdx$ , die auf eine Differentialgleichung zweiten Grades führen, hierauf beziehen sich also zuerst die Fälle, in denen  $Z$  nur aus den Buchstaben  $x$ ,  $y$  und  $p$  zusammengesetzt wird, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

wovon freilich der zweite Fall der ersten Klasse ausgeschlossen werden muss, was natürlich passiert, wenn  $P$  eine Funktion nur von  $x$  und  $y$  war, sodass

für den gegenwärtigen Fall die Größe  $P$  außer  $x$  und  $y$  auch den Buchstaben  $p$  erfassen muss. Dann wird aber die Gleichung für die gesuchte Kurve  $0 = N - \frac{dP}{dx}$  sein, so, weil  $P$   $p$  involviert, und daher  $d \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)$ , die Formel  $\frac{dP}{dx}$  Differentiale zweiten Grades enthalten wird; und diese Gleichung ist keinesfalls bestimmt, weil sie sogar zwei beliebige Konstanten enthält, mit welchen bewirkt werden kann, dass die gesuchte Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurch geht, und daher sind die Fragen dieser Klasse genauso zu bestimmen, dass die Kurven gefunden werden, die nicht unter ganz und gar allen Kurven, sondern nur unter denen, die durch die zwei selben Punkte hindurchgehen, sich der vorgeschriebenen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen; Fragen dieser Klasse sind aber immer so beschaffen, dass sie durch ihre Natur diese Einschränkung erfordern.

§51 Außerdem müssen zur zweiten Klasse aber auch die Fälle gezählt werden, in denen  $Z = \mathfrak{Z}q$  ist, während  $\mathfrak{Z}$  irgendeine Funktion von  $x$ ,  $y$  und  $p$  ist, wenn nämlich galt

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp,$$

werden wir haben

$$M = \mathfrak{M}q, \quad N = \mathfrak{N}q, \quad P = \mathfrak{P}q \quad \text{und} \quad Q = \mathfrak{Z},$$

woher, weil die Gleichung für die Kurve diese ist,

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \quad \text{oder} \quad 0 = N - \frac{1}{dx} d \cdot \left( P - \frac{dQ}{dx} \right),$$

diese Formel  $P - \frac{dQ}{dx}$  in diese übergeht

$$\mathfrak{P}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{P}p - \mathfrak{M} - \mathfrak{N}p - \mathfrak{P}q = -\mathfrak{M} - \mathfrak{N}p,$$

woher unsere Gleichung werden wird

$$0 = N + \frac{1}{dx} d(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p) = 2\mathfrak{N}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p \frac{d\mathfrak{N}}{dx},$$

die natürlich nur Differentiale zweiten Grades involviert. Wenn also noch allgemeiner diese Integralformel vorgelegt war  $\int (Z + \mathfrak{Z}q) dx$ , wo  $Z$  und  $\mathfrak{Z}$  wie

auch immer aus den Größen  $x$ ,  $y$  und  $p$  zusammengesetzt waren, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + 2\mathfrak{M}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

oder auch

$$0 = Ndx - dP + 2\mathfrak{M}dp + d\mathfrak{M} + pd\mathfrak{M},$$

welche natürlich eine differentiale zweiten Grades ist.

### 3. Klasse

§52 Aber wenn die Größe  $Z$  so aus den Buchstaben  $x$ ,  $y$ ,  $p$  und  $q$  zusammengesetzt war, dass für

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

gesetzt die Größe  $Q$  auch den Buchstaben  $q$  involviert, dann werden Fälle dieser Art zur dritten Klasse zu zählen sein und weil diese Gleichung für die gesuchte Kurve gefunden wird

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

ist es ersichtlich, dass der Term  $\frac{ddQ}{dx^2}$  Differentiale vierten Grades involviert, woher die endliche Gleichung für die Kurve vier beliebige Konstanten verwickelt, mit denen also bewirkt werden kann, dass die verlangte Kurve nicht nur durch die zwei gegebenen Grenzen hindurch gilt, sondern auch ihre Tangenten in jeder der beiden Grenzen eine gegebene Lage erhalten, in welcher vierfachen Bestimmung die Natur der Fragen, die sich auf diese Klasse beziehen, enthalten ist und sehr klar erkannt wird.

§53 Mit den übrigen Fällen, die sich auf diese Klasse beziehen, halte ich mich nicht auf, sondern führe zur besseren Illustration ein außergewöhnliches Beispiel an, in welchem elastische Kurven gesucht zu werden pflegen. Wenn natürlich der Buchstaben  $q$  den Krümmungsradius der gesuchten Kurve im Punkt  $M$  bezeichnet, erfreuen sich alle Kurven dieser Eigenschaft, dass in

ihnen diese Formel  $\int \frac{dx \sqrt{1+pp}}{qq}$  ein Minimum wird und man daher  $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{qq}$  hat, weil aber  $q = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$  ist, werden wir  $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$  haben, woher gilt

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = -\frac{5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \quad \text{und} \quad Q = +\frac{2q}{(1+pp)^{5:2}},$$

woher, weil wegen  $N = 0$  die Gleichung für die gesuchte Kurve ist

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2},$$

ihr Integral sofort liefert

$$P - \frac{dQ}{dx} = A,$$

die noch eine differentiale dritten Grades ist.

**§54** Aber diese Gleichung kann bis jetzt noch im Allgemeinen integriert werden, sie werde nämlich mit  $qdx = dp$  multipliziert, sodass man diese Gleichung hat

$$Pdp - qdQ = Adp,$$

weil aber  $dZ = Pdp + Qdq$  ist, wird  $Pdp = dZ - Qdq$  sein, nach Einsetzen welches Wertes diese Gleichung resultiert:

$$dZ - Qdq - qdQ = Adp,$$

deren Integral natürlich

$$Z - Qq = Ap + B$$

ist, nun werden also für  $Z$  und  $Q$  die oben gegebenen Werte eingesetzt und wir werden die folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{qq}{(1+pp)^{5:2}} = Ap + B,$$

nach Ändern der Vorzeichen der Konstanten werden wir also berechnen

$$qq = (Ap + B)(1+pp)^{5:2}$$

und daher

$$q = (1+pp)^{5:4} \sqrt{Ap + B} = \frac{dp}{dx},$$

und so folgern wir

$$dx = \frac{dp}{(1 + pp)^{5:4} \sqrt{Ap + B}}$$

und daher weiter

$$dy = \frac{pdp}{(1 + pp)^{5:4} \sqrt{Ap + B}},$$

mit welchen zwei Gleichungen die Konstruktion der Kurve durchgeführt wird.

**§55** Als einst diese Methode der Maxima und Minima behandelt zu werden begonnen worden ist, sind nicht nur Kurven solcher Art untersucht worden, in denen eine gewisse Integralformel  $\int Zdx$  entweder ein Maximum oder Minimum sein würde, sondern es wurden auch Fragen solcher Art vorgelegt, dass nicht unter vollkommen allen Kurven, sondern nur denen, die die gleiche Länge haben, die gesucht wird, in welcher jene Formel maximal oder minimal wird, aus welchem Fall der Name des isoperimetrischen Problems entstanden ist, aber dieser Name hindert nicht daran, dass auch allgemeinere Fragen solcher Art vorgelegt wurden, dass unter all den Kurven, deren der Wert einer gewissen Integralformel  $\int Vdx$  gleichermaßen entspricht, die bestimmt wird, in welcher die Formel  $\int Zdx$  den maximalen oder minimalen Wert enthält, ja die Bedingungen sind sogar noch auf diese Weise vermehrt worden, dass nur unter allen den Kurven, denen nicht nur die Formel  $\int Vdx$ , sondern auch diese  $\int V'dx$ ,  $\int V''dx$  etc. gleichermaßen zufallen, die zufällt, in welcher  $\int Zdx$  ein Maximum oder Minimum wird, Probleme welcher Art zur damaligen Zeit äußerst schwierig schienen. Nachdem ich aber in meiner Abhandlung über diesen Gegenstand gezeigt hatte, dass Probleme dieser Art immer auf das einfache Problem zurückgeführt werden können, in dem unter ganz und gar allen Linien die gesucht wird, in welcher diese Integralformel

$$\int dx (Z + \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \text{etc.})$$

ein Maximum oder Minimum wird, haben Probleme dieser Art nicht weiter etwas an Schwierigkeit.