

# KAPITEL 3

## ÜBER DIE VARIATION ZWEI VARIABLEN INVOLVIERENDER EINFACHER INTEGRALFORMELN

Leonhard Euler

### DEFINITION 6

**§70** *Einfach nenne ich hier eine Integralformel, die keine anderen Integrale in sich involviert, sondern einfach ein Integral einer Differentialformel darstellt, die außer den zwei Variablen irgendwelche Differentiale derer umfasst.*

### KOROLLAR 1

**§71** Wenn also  $x$  und  $y$  die zwei Variablen sind, wird die Integralformel  $\int W$  einfach sein, wenn der Ausdruck  $W$  außer diesen Variablen nur deren Differentiale, von welcher Ordnung auch immer sie waren, enthält und nicht zusätzlich andere Integralformeln in sich verwickelt.

### KOROLLAR 2

**§72** Wenn wir daher also festlegen

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{etc.,}$$

sodass die Gattung der Differentiale beseitigt wird, weil ja die Integration eine Differentialformel verlangt, wird jener Ausdruck  $W$  immer auf eine Form dieser Art  $Vdx$  zurückgeführt werden, während  $V$  eine Funktion der Größen  $x, y, p, q$  etc. ist.

### KOROLLAR 3

§73 Weil also eine einfache Integralformel von dieser Art  $\int Vdx$  ist, wo  $V$  eine Funktion der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. ist, wird ihre Gestalt am angenehmsten ihr Differential darstellen, wenn wir sagen

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

zu sein.

### BEMERKUNG

§74 Ich unterscheide hier einfache Integralformeln von zusammengesetzten, in denen die Integration von Differentialformeln solcher Art vorgelegt wird, die schon selbst eine oder mehrere Integralformeln involvieren. Wie wenn beispielsweise der Buchstabe  $s$  das Integral

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + pp}$$

bezeichnet und die GröÙe  $V$  auÙer jenen GröÙen auch noch dieses  $s$  involviert, wird die Integralformel  $\int Vdx$  mit Recht als zusammengesetzt angesehen; deren Variation erfordert besondere darauf [Kap. IV] zu erläuternde Vorschriften. In diesem Kapitel habe ich aber beschlossen, zuerst die Methode, die Variationen einfacher Integralformeln zu finden, anzugeben.

### THEOREM 2

§75 Die Variation der Integralformel  $\int W$  ist immer gleich dem Integral der Variation derselben Differentialformel, deren Integration vorgelegt wird, oder es ist

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

## BEWEIS

Weil die Variation der Übertrag ist, um welchen der variierte Wert einer Größe ihren natürlichen Wert übersteigt, wollen wir den variierten Wert der vorgelegten Formel  $\int W$  betrachten, welchen sie erhält, wenn anstelle der Variablen  $x$  und  $y$  die Werte derselben um ihre Variationen  $\delta x$  und  $\delta y$  vermehrt eingesetzt werden. Weil aber dann die Größe  $W$  in  $W + \delta W$  übergeht, wird der variierte Wert der vorgelegten Form dieser sein

$$\int (W + \delta W) = \int W + \int \delta W;$$

daher, weil gilt

$$\delta \int W = \int (W + \delta W) - \int W,$$

werden wir haben

$$\delta \int W = \int \delta W,$$

woher klar ist, dass die Variation des Integrals gleich dem Integral der Variation wird. Dasselbe kann aber auch auf diese Weise gezeigt werden. Es werde  $\int W = w$  gesetzt, sodass die Variation  $\delta w$  zu suchen ist. Weil also nach Nehmen von Differentialen  $dw = W$  ist, werden nur die Variationen genommen und es wird sein

$$\delta dw = \delta W = d\delta w$$

wegen  $\delta dw = d\delta w$ . Nun aber liefert die Gleichung  $d\delta w = \delta W$  erneut integriert

$$\delta w = \int \delta W = \delta \int W.$$

## KOROLLAR 1

**§76** Nachdem also diese Integralformel  $\int V dx$  vorgelegt wurde, wird ihre Variation  $\delta \int V dx$  gleich

$$\int \delta (V dx) = \int (V \delta dx + dx \delta V)$$

sein und daher wird man wegen  $\delta dx = d\delta x$  haben

$$\delta \int V dx = \int V d\delta x + \int dx \delta V.$$

## KOROLLAR 2

§77 Für  $\delta x = w$  gesetzt, sodass  $d\delta x = dw$  ist, weil gilt

$$\int V dw = Vw - \int w dV,$$

wird sich im ersten Glied des Differentials der Variation entledigt und es wird werden

$$\delta \int V dx = V\delta x - \int dV\delta x + \int dx\delta V,$$

wo der erste Teil von der Integration frei ist.

## BEMERKUNG

§78 Wie wir oben [§37] gezeigt haben, dass die Differentiationszeichen  $d$ , die einem Ausdruck vorangestellt wurden, mit dem Variationszeichen  $\delta$  nach Belieben vertauscht werden können, so sehen wir nun, dass das Integrationszeichen  $\int$  mit dem Variationszeichen  $\delta$  vertauscht werden kann, weil ja gilt

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

Und dies ist auch für wiederholte Integrationen klar, dass, wenn eine solche Formel  $\iint W$  vorgelegt war, ihre Variation auf diese Weisen dargeboten werden kann

$$\delta \iint W = \int \delta \int W = \iint \delta W,$$

und daher wird die Variation von Integralformeln auf Variationen von Ausdrücken, die weiter keine Integrationen involvieren, zurückgeführt, für das Finden welcher bereits oben Vorschriften angegeben worden sind.

## PROBLEM 6

§79 Nachdem von den zwei Variablen  $x$  und  $y$  die Variationen  $\delta x$  und  $\delta y$  vorgelegt wurden, wenn nach Festlegen von

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{etc.}$$

$V$  irgendeine Funktion der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. war, die Variation der Integralformel  $\int V dx$  zu finden.

## LÖSUNG

Gerade haben wir gesehen [§77], dass die Variation dieser Integralformel so ausgedrückt wird, dass gilt

$$\delta \int V dx = V \delta x - \int dV \delta x + \int dx \delta V.$$

Um nun die Variation  $\delta V$  zu finden, weil  $V$  eine Funktion der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. ist, wollen wir ihr Differential festlegen zu sein

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

und auf die gleiche Weise wird ihre Variation so ausgedrückt sein

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

nach Einsetzen welcher Werte wir die gesuchte Variation erhalten

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int dx (M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) \\ &\quad - \int \delta x (Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}); \end{aligned}$$

weil sich dort die von  $M$  abhängenden Anteile gegenseitig aufheben, wird, nachdem die Teile gemäß der Buchstaben  $N, P, Q, R$  etc. getrennt wurden, die Variation sein

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int N (dx \delta y - dy \delta x) + \int P (dx \delta p - dp \delta x) \\ &\quad + \int Q (dx \delta q - dq \delta x) + \int R (dx \delta r - dr \delta x) \\ &\quad + \text{etc.}, \end{aligned}$$

wo, wie wir oben [§56] gefunden haben, ist

$$dx \delta p = d\delta y - p d\delta x, \quad dx \delta q = d\delta p - q d\delta x, \quad dx \delta r = d\delta q - r d\delta x \quad \text{etc.},$$

nach Einsetzen welcher Werte wegen  $dy = p dx$  erhalten wird

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int N dx (\delta y - p \delta x) + \int P d. (\delta y - p \delta x) \\ &\quad + \int Q d. (\delta p - q \delta x) + \int R d. (\delta q - r \delta x) \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu reduzieren, werde bemerkt, dass gilt

$$\begin{aligned}\delta p - q\delta x &= \frac{d\delta y - p d\delta x - d p \delta x}{dx} = \frac{d.(\delta y - p\delta x)}{dx}, \\ \delta q - r\delta x &= \frac{d\delta p - q d\delta x - d q \delta x}{dx} = \frac{d.(\delta p - q\delta x)}{dx}, \\ \delta r - s\delta x &= \frac{d\delta q - r d\delta x - d r \delta x}{dx} = \frac{d.(\delta q - r\delta x)}{dx} \\ &\text{etc.},\end{aligned}$$

womit jede Formel auf die vorhergehende zurückgeführt wird; daher, wenn wir der Kürze wegen  $\delta y - p\delta x = w$  setzen, wird es sein wie folgt

$$\begin{aligned}\delta y - p\delta x &= w, \\ \delta p - q\delta x &= \frac{dw}{dx}, \\ \delta q - r\delta x &= \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx}, \\ \delta r - s\delta x &= \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Und so, nachdem die Variationen der derivierten Buchstaben  $p, q, r$  etc. aus der Rechnung ausgeschlossen wurden, wird die gesuchte Variation sein

$$\begin{aligned}\delta \int V dx &= V\delta x + \int N dx w + \int P dw + \int Q d. \frac{dw}{dx} + \int R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} \\ &+ \int S d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} + \int T d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} + \text{etc.},\end{aligned}$$

das Bildungsgesetz welcher Progression offenbar ist, Differentiale welchen Grades auch immer in die Form  $V$  eingehen.

## KOROLLAR 1

**§80** Der erste Teil dieser Variation  $V\delta x$  ist also frei vom Integrationszeichen und involviert daher allein die Variation  $\delta x$ , aber die übrigen Teile enthalten jede von beiden immer zusammengenommen und im Buchstaben  $w = \delta y - p\delta x$  erfasst.

## KOROLLAR 2

§81 Der zweite Teil

$$\int N dx \cdot w = \int N w dx$$

kann nicht bequemer ausgedrückt werden, der dritte  $\int P dw$  scheint aber gefälliger so ausgedrückt werden zu können, dass

$$\int P dw = Pw - \int w dP$$

ist und hinter dem Integralzeichen nur die Größe  $w$  selbst gefunden wird.

## KOROLLAR 3

§82 Der vierte Teil  $\int Q d. \frac{dw}{dx}$  wird auf die gleiche Weise auf

$$Q \frac{dw}{dx} - \int dQ \frac{dw}{dx}$$

zurückgeführt und dieses letzte Glied, weil  $\int \frac{dQ}{dx} dw$  ist, liefert weiter

$$\frac{dQ}{dx} w - \int w d. \frac{dQ}{dx},$$

sodass der vierte Teil in diese Glieder aufgelöst wird

$$Q \frac{dw}{dx} - \frac{dQ}{dx} w + \int w d. \frac{dQ}{dx}.$$

## KOROLLAR 4

§83 Der fünfte Teil

$$\int R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx}$$

wird zuerst auf diesen zurückgeführt

$$R \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} - \int \frac{dR}{dx} d. \frac{dw}{dx},$$

dann aber das zweite Glied auf

$$\frac{dR}{dx} \frac{dw}{dx} - \int \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} \cdot dw$$

und dieses schließlich weiter auf

$$\frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} \cdot w - \int w d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx},$$

sodass dieser fünfte Teil nun so ausgedrückt wird

$$R \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} - \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} \cdot w - \int w d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx}.$$

## KOROLLAR 5

§84 Auf die gleiche Weise wird der sechste Teil

$$\int S d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx}$$

so ausgedrückt gefunden

$$S \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} - \frac{dS}{dx} \cdot \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} - \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx} \cdot w \\ + \int w d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx}.$$

## PROBLEM 7

§85 Nach Festlegen von  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ ,  $dr = s dx$  etc., wenn  $V$  irgendeine Funktion der Größen  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $s$  etc. war, sodass gilt

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.},$$

die Variation der Integralformel  $\int V dx$ , die aus der Variation jeder der beiden Variablen  $x$  und  $y$  entsteht, so auszudrücken, dass unter dem Integralzeichen keine Differentiale von Variationen auftauchen.



## LÖSUNG

In den Korollaren des vorhergehenden Problems ist schon alles zu diesem Zweck vorbereitet worden, sodass nichts anderes von Nöten ist, außer dass die Transformationen der einzelnen Teile in Ordnung gebracht werden, wonach Teile zweifacher Art erhalten werden, während eine die Integralformeln enthält, welche sich freilich alle zu derselben Summe sammeln lassen, die andere aber die absoluten Teile, welche wir so in Glieder aufteilen werden, dass sie gemäß den Variationen  $\delta x$  und  $\delta y$  selbst und deren Differentialen jeder Ordnung fortschreiten. Nachdem aber der Kürze wegen die Formel  $\delta y - p\delta x = w$  gesetzt wurde, wird sich die gesuchte Variation so verhalten

$$\begin{aligned} & \delta \int V dx \\ &= \int w dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx} - \text{etc.} \right) \\ &+ V \delta x + w \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} - \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &\quad + \frac{dw}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dS}{dx} - \text{etc.} \right) \\ &\quad + \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} \left( R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &\quad + \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dw}{dx} (S - \text{etc.}) \\ &\quad + \text{etc.,} \end{aligned}$$

die Gestalt welcher Form aus der Betrachtung allein sofort klar ist, sodass eine weitere Illustration nicht von Nöten ist.

## KOROLLAR 1

**§86** Dieser Ausdruck wird um Vieles vereinfacht, wenn das Element  $dx$  konstant genommen wird, wodurch freilich die Allgemeinheit des Ausdrucks

in keinsten Weise eingeschränkt wird; dann wird nämlich werden

$$\begin{aligned}
\delta \int V dx &= \int w dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} + \text{etc.} \right) \\
&+ V \delta x + w \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{dw}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{ddw}{dx^2} \left( R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{d^3w}{dx^3} (S - \text{etc.}) \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

## KOROLLAR 2

§87 Wenn die Frage über eine gekrümmte Linie gestellt wird, vereinigt der erste Integralteil den Wert durch die ganze Kurve hindurch von Anfang an bis hin zur Grenze, wo die die Koordinaten  $x$  und  $y$  bestehen, und umfasst zugleich alle in den einzelnen Punkten getätigten Variationen, während die übrigen absoluten Teile nur durch die in den Extremitäten gemachten Variationen bestimmt werden.

## KOROLLAR 3

§88 Wenn wir die durch  $x$  und  $y$  bestimmte Kurve als gegeben ansehen und eine andere von ihr unendlich wenig abweichende Kurve betrachtet wird, während in den einzelnen Punkten jeder der beiden Koordinaten irgendwelche Variationen zugeteilt werden, zeigt der gefundene Ausdruck auf, wie sehr der aus der variierten Kurve errechnete Wert der Integralformel  $\int V dx$  denselben aus der Kurve selbst entnommenen Wert übersteigt.

## KOROLLAR 4

§89 Weil  $w = \delta y - p \delta x$  ist, ist klar, dass diese Größe  $w$  verschwindet, wenn in den einzelnen Punkten die Variationen  $\delta x$  und  $\delta y$  so angenommen werden,

dass gilt

$$\delta y : \delta x = p : 1 = dy : dx.$$

In diesem Fall weicht also die variierte Kurve überhaupt nicht von der gegebenen Kurve ab und die ganze Variation der Formel  $\int Vdx$  wird auf  $V\delta x$  zurückgeführt.

#### BEMERKUNG 1

§90 Diese für die Integralformel  $\int Vdx$  gefundene Variation liefert sofort die Regel, die ich einst für das Finden einer Kurve angegeben habe, in welcher der Wert derselben Integralformel maximal oder minimal ist. Jene Regel erfordert nämlich, dass dieser Ausdruck

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}$$

gleich Null gesetzt wird. Hier ist aber sofort ersichtlich, dass dafür, dass die Variation der Formel  $\int Vdx$  verschwindet, wie es auch die Natur der Maxima und Minima erfordert, vor Allem verlangt wird, dass der erste im Integralzeichen enthaltene Teil verschwindet, woher

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

wird. Außerdem aber müssen auch die absoluten Teile gleich Null werden, worin die Anpassung an jede der beiden Grenzen der Kurve enthalten ist. Denn die Natur der Kurve selbst wird durch jene Gleichung ausgedrückt; weil diese wegen der Differentiale höheren Grades genauso viele Integrationen und genauso viele beliebige Konstanten verwickelt, werden jene absoluten Teile zur Bestimmung dieser Konstanten dienen, sodass am Anfang wie am Ende die gesuchte Kurve gewissen Bedingungen gehorcht, wie beispielsweise zu gegebenen gekrümmten Linien hin beschränkt wird. Und wenn jene Gleichung eine differentiale vierter oder gar höherer Ordnung war, wird auch die Anzahl der absoluten Teile vermehrt werden, mit welchen bewirkt werden kann, dass die gesuchte Kurve nicht nur auf beiden Seiten zu gegebenen gekrümmten Linien hin begrenzt wird, sondern ebendort auch eine gewisse Ausrichtung, ja sogar, wenn sie zu höheren Differentialen ansteigt, ein gewisses Gesetz der Krümmung vorgeschrieben werden kann. Bei der Anpassung

pfllegt es aber immer sehr schön zu passieren, dass die Gestalt der Fragen selbst Bedingungen solcher Art involviert, denen durch die absoluten Anteile sehr angenehm Genüge geleistet werden kann.

## BEMERKUNG 2

§91 Wie große Geheimnisse aber in dieser Form, die wir für die Variation der Integralformel  $\int Vdx$  gefunden haben, verborgen liegen, lässt sich bei ihrer Anwendung auf Maxima und Minima um vieles erhellender aufzeigen; ich bemerke hier nur, dass der Integralteil notwendigerweise in diese Variation eingeht. Weil wir nämlich die Sache im weitesten Sinne aufgefasst haben, dass wir in den einzelnen Punkten der Kurve jeder der beiden Variablen  $x$  und  $y$  irgendwelche nach keinem Gesetz miteinander verbundenen Variationen zuteilen, kann es ganz und gar nicht geschehen, dass die Variation, die der ganzen Kurve entspricht, nicht zugleich von allen dazwischenliegenden Variationen abhängt, nachdem welche anders festgelegt wurden, es natürlich von Nöten ist, dass daher die Variation der ganzen Kurve eine Veränderung erfährt. Und hauptsächlich darin weicht die Variation von Integralformeln von der Variation von Ausdrücken solcher Art ab, wie wir sie im oberen Kapitel behandelt haben, die alleinig von der den letzten Elementen zugeteilten Variation abhängt. Daraus folgt klar ersichtlich, wenn die Größe  $V$  unter Umständen so beschaffen war, dass die Differentialformel  $Vdx$  eine Integration zulässt, wobei keine Relation zwischen den Variablen  $x$  und  $y$  festgelegt wurde, und so die Integralformel  $\int Vdx$  eine absolute Funktion der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. sei, dass dann auch ihre Variation nur von der Variation der äußersten Elemente abhängen kann und so der Integralteil der Variation vollkommen verschwinden muss, woher das folgende außergewöhnliche Theorem gefolgert wird.

## THEOREM 3

§92 Wenn nach Setzen von  $dy = pdx, dp = qdx, dq = rdx, dr = sdx$  etc.  $V$  eine Funktion solcher Art von  $x, y, p, q, r, s$  etc. war, dass, nachdem ihr Differential

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{etc.}$$

gesetzt wurde,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

war, dann wird für konstant angenommenes Element  $dx$  die Differentialformel  $Vdx$  per se integrierbar sein, wobei keine Relation zwischen den Variablen  $x$  und  $y$  festgelegt wurde, und ebenso umgekehrt.

## BEWEIS

Wenn galt

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0,$$

dann verwickelt die Variation der Integralformel  $\int Vdx$  eine Integralformel und hängt daher für jede Lage der Koordinaten  $x$  und  $y$  allein von den Variationen, die selbigen an der äußersten Grenze zugeteilt werden, ab, was keineswegs geschehen könnte, wenn sich die Formel  $Vdx$  einer Integration widersetze, deshalb weil dann die Variation darüber hinaus von allen dazwischen liegenden Variationen zugleich notwendigerweise abhinge; daher folgt, sooft jene Gleichung Geltung hat, dass genauso oft die Formel  $Vdx$  eine Integration zulässt, sodass  $\int Vdx$  eine gewisse und bestimmte Funktion der Größen  $x, y, p, q, r, s$  etc. sein wird. Sooft aber umgekehrt die Differentialformel  $Vdx$  eine Integration zulässt und ihr Integral  $\int Vdx$  deshalb eine tatsächliche Funktion der Größen  $x, y, p, q, r, s$  etc. ist, sooft hängt auch ihre Variation nur von äußersten Variationen von  $x$  und  $y$  ab und die dazwischen liegenden Variationen können sie in keinsten Weise beeinflussen. Daher ist es nötig, dass der oben gefundene Integralteil der Variation verschwindet, was nicht geschehen kann, wenn nicht galt

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0,$$

und so ist auch die Umkehrung des vorgelegten Theorems mit der Wahrheit verträglich.

## KOROLLAR 1

§93 Man bestaune also dieses wunderbare Kriterium, mit dessen Hilfe eine Differentialformel von zwei Variablen, Differentiale welchen Grades auch

immer in sie eingehen, beurteilt werden kann, ob sie integrierbar ist oder nicht. Es erstreckt sich also um vieles weiter als jenes hinreichend bekannte Kriterium, mit welchem die Integrierbarkeit von Differentialformeln ersten Grades erkannt zu werden pflegt.

## KOROLLAR 2

§94 Wenn zuerst also die Größe  $V$  nur eine Funktion von  $x$  und  $y$ , die kein Verhältnis von Differentialen involviert, ist, sodass gilt

$$dV = Mdx + Ndy,$$

dann lässt die Differentialformel  $Vdx$  keine Integration zu, wenn nicht  $N = 0$  ist, das heißt, wenn nicht  $V$  eine Funktion nur von  $x$  ist; dies ist freilich per se klar.

## KOROLLAR 3

§95 Nachdem aber eine Differentialformel dieser Art vorgelegt wurde  $vdx + udy$ , gibt sie mit der Form  $Vdx$  verglichen  $V = v + pu$  wegen  $dy = pdu$  und daher

$$M = \left(\frac{dv}{dx}\right) + p\left(\frac{du}{dx}\right), \quad N = \left(\frac{dv}{dy}\right) + p\left(\frac{du}{dy}\right) \quad \text{und} \quad P = u,$$

weil ja die Größen  $v$  und  $u$  keine Differentiale zu verwickeln angenommen werden. Es wird also sein

$$dP = du = dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right).$$

Daher, weil das Kriterium der Integrierbarkeit erfordert, dass gilt

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

wird für diesen Fall sein

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) + p\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right) - p\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$$

oder

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right),$$

was das schon für gewöhnlich bekannte Kriterium ist.

## BEMERKUNG 1

§94 Der Beweis dieses Theorems ist ganz und gar einzigartig, weil er aus der Lehre der Variationen hergeholt ist, die dennoch von diesem Gegenstand völlig verschieden ist; aber es steht kaum ein anderer Weg offen, zu seinem Beweis zu gelangen. Darauf ist aber hier die genauere Erkenntnis der Funktionen sorgsam zu bemerken, mit welcher wir gezeigt haben, dass die Integralformel  $\int Vdx$  keinesfalls wie eine Funktion der Größen  $x, y, p, q, r$  etc. betrachtet werden kann, wenn sie nicht tatsächlich eine Integration zulässt. Denn die Natur von Funktionen hat immer diese hinzugefügte Eigenschaft, dass, sobald wie den Größen, die in sie eingehen, bestimmte Werte zugeteilt werden, die aus ihnen gebildete Funktion selbst einen bestimmten Wert erhält; wie beispielsweise die Funktion  $xy$ , wenn wir  $x = 2$  und  $y = 3$  setzen, den Wert 6 annimmt. Weit anders aber ereignet es sich bei der Integralformel  $\int ydx$ , deren Wert für den Fall  $x = 2$  und  $y = 3$  keinesfalls angegeben werden kann, wenn nicht zwischen  $y$  und  $x$  eine gewisse Relation festgelegt wird; dann aber geht die Formel in eine Funktion einer einzigen Variable über. Die Natur von Integralformeln, die nicht integriert werden können, muss sorgfältig von der Natur der Funktionen unterschieden werden, weil Funktionen, sobald wie den variablen Größen, aus denen sie zusammengesetzt werden, bestimmte Werte zugeteilt werden, dann selbst auch bestimmte Werte erhalten, auch wenn die Variablen auf keine Weise voneinander abhängen; dies geschieht in keinsten Weise bei Integralformeln, deren Bestimmung natürlich alle Zwischenwerte zugleich einschließt. Besonders ist aber die Lehre über Maxima und Minima aber auf diesen Unterschied ist gestützt, auf welche wir hier achten, wo Formeln, denen die Eigenschaft des Maximums oder Minimums zukommen muss, notwendigerweise Integrale solcher Art sein müssen, die per se keine Integration zulassen.

## BEMERKUNG 2

§97 Zur größeren Illustration des Theorems wollen wir eine Integralformel  $\int Vdx$  solcher Art betrachten, die per se integrierbar ist, und wir wollen eines Beispiels wegen

$$\int Vdx = \frac{xdy}{ydx} = \frac{xp}{y}$$

festlegen, so dass gilt

$$V = \frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}$$

und daher diese Integralformel

$$\left( \frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y} \right) dx$$

absolut integrierbar ist, und wir sollen sehen, ob unser Theorem diese Integrierbarkeit aufzeigt.

Wir wollen also die Größe  $V$  differenzieren und nach Vergleichen des Differentials mit der Form

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

werden wir erhalten

$$M = -\frac{pp}{yy} + \frac{q}{y}, \quad N = -\frac{p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}, \quad P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy} \quad \text{und} \quad Q = \frac{x}{y}.$$

Weil nun gemäß des Theorems werden muss

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,$$

berechnen wir zuerst durch Differenzieren

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy} \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy},$$

dann aber

$$\frac{ddQ}{dx^2} = -\frac{2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}.$$

Also ist

$$\frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2} = -\frac{p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy},$$

welchem Wert die Größe  $N$  natürlich gleich ist.



### BEMERKUNG 3

§98 Wann immer im Übrigen die Differentialformel  $Vdx$  die Integration per se zulässt und daher nach Festlegen von

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

gemäß des Theorems gilt

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0,$$

werden daher andere bemerkenswerte Folgerungen abgeleitet. Weil nämlich zuerst durch Multiplizieren mit  $dx$  und Integrieren wird

$$\int Ndx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \text{etc.} = A,$$

ist klar, dass auch die Formel  $Ndx$  uneingeschränkt integrierbar ist. Weil darauf weiter wird

$$\int dx \left( \int Ndx - P \right) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^3S}{dx^2} - \text{etc.} = Ax + B,$$

lässt auch die Formel

$$dx \left( \int Ndx - P \right)$$

eine Integration zu. Danach wird auch auf die gleiche Weise diese Form integrierbar sein

$$dx \left( \int dx \left( \int Ndx - P \right) + Q \right),$$

dann aber auch diese

$$dx \left( \int dx \left( \int dx \left( \int Ndx - P \right) + Q \right) - R \right)$$

und so weiter. Daher folgern wir das nachstehende nicht weniger bemerkenswerte und in der Praxis äußerst nützliche Theorem.

## THEOREM 4

**§99** Wenn nach Festlegen von  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ ,  $dr = s dx$  etc. eine Funktion solcher Art von  $x, y, p, q, r, s$  etc. war, dass die Differentialformel  $V dx$  per se integrierbar ist, dann werden auch nach Festlegen von

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.}$$

die folgenden Differentialformeln per se eine Integration zulassen:

- I.** Die Formel  $N dx$  wird per se integrierbar sein, dann wird nach Festlegen von  $P - \int N dx = \mathfrak{P}$ :
- II.** Die Formel  $\mathfrak{P} dx$  per se integrierbar sein; weiter wird nach Festlegen von  $Q - \int \mathfrak{P} dx = \mathfrak{Q}$ :
- III.** Die Formel  $\mathfrak{Q} dx$  per se integrierbar sein; darauf wird nach Festlegen von  $R - \int \mathfrak{Q} dx = \mathfrak{R}$ :
- IV.** Die Formel  $\mathfrak{R} dx$  per se integrierbar sein; weiter wird nach Festlegen von  $S - \int \mathfrak{R} dx = \mathfrak{S}$ :
- V.** Die Formel  $\mathfrak{S} dx$  per se integrierbar sein und so weiter.

## BEWEIS

Die Gültigkeit dieses Theorems ist schon im vorhergehenden Paragraph aufgezeigt worden, woher zugleich klar ist, wenn alle diese Formeln eine Integration zulassen, dass auch die anfängliche  $V dx$  uneingeschränkt integrierbar sein wird.

## KOROLLAR 1

**§100** Weil  $V$  eine Funktion dieser Größen ist

$$x, \quad y, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx} \quad \text{etc.,}$$

können die durch Differentiation derivierten Größen  $M, N, P, Q, R$  etc. daher auch so dargeboten werden, dass gilt

$$M = \left( \frac{dV}{dx} \right), \quad N = \left( \frac{dV}{dy} \right), \quad P = \left( \frac{dV}{dp} \right), \quad Q = \left( \frac{dV}{dq} \right) \quad \text{etc.},$$

woher wegen der ersten Formel klar ist, wenn die Formel  $Vdx$  integrierbar war, dass dann auch die Formel  $\left( \frac{dV}{dy} \right) dx$  integrierbar sein wird.

## KOROLLAR 2

**§101** Darauf werden also auch derselben Begründung wegen diese Formel  $\left( \frac{d^2V}{dy^2} \right) dx$  und daher weiter diese  $\left( \frac{d^3V}{dy^3} \right) dx, \left( \frac{d^4V}{dy^4} \right) dx$  etc. alle per se eine Integration zulassen.

## KOROLLAR 3

**§102** Weil nur so viele Buchstaben  $P, Q, R$  etc. vorhanden sind, Differentiale wie vielen Grades in der Formel  $Vdx$  gefunden werden, und auch alle folgenden verschwinden, müssen die daher derivierten germanischen Buchstaben  $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  etc. schließlich verschwinden oder in Funktionen der Größe  $x$  allein übergehen, weil anderenfalls die folgenden Integrationen nicht stattfinden könnten.

## BEISPIEL

**§103** Es sei  $V$  eine Funktion solcher Art, dass sein wird

$$\int V dx = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{x dx dy}.$$

Nach den Substitutionen

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx$$

wird für dieses Beispiel die Funktion  $V$  so ausgedrückt werden

$$V = \frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq} - \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq},$$

woher wir durch Differentiation die folgenden Werte erhalten

$$\begin{aligned} N &= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3p\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{r(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}, \\ P &= \frac{(1+4pp)\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3ypr\sqrt{1+pp}}{xqq}, \\ Q &= -\frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3}, \\ R &= -\frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}. \end{aligned}$$

Nun muss also zuerst die Formel  $Ndx$  integrierbar sein oder aber

$$-\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3pdx\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{dq(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq},$$

woher sofort klar ist, dass dieses Integral sein wird

$$\int Ndx = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq}.$$

Nun erhalten wir für die zweite Formel daher

$$\mathfrak{P} = P - \int Ndx = \frac{3pp\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3ypr\sqrt{1+pp}}{xqq},$$

sodass diese Formel zu integrieren ist

$$\mathfrak{P}dx = \frac{3pdy\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3ypdx\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3ydx(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3ypdq\sqrt{1+pp}}{xqq},$$

deren Integral oder zumindest ein Teil von diesem aus dem letzten Glied natürlich mit  $\frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq}$  berechnet wird; weil deren Differential die ganze Formel ausschöpft, wird sein

$$\int \mathfrak{P}dx = \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq}.$$

Nun werden wir für die dritte Formel haben

$$\Omega = Q - \int \mathfrak{P} dx = -\frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq},$$

woher durch Multiplizieren mit  $dx$  wegen  $dx = \frac{dp}{q}$  im letzten Glied wird

$$\Omega dx = -\frac{dy(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{ydx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2y dq(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3yp dp \sqrt{1+pp}}{xqq},$$

deren vorletztes Glied dieses Integral aufzeigt

$$\int \Omega dx = -\frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}.$$

Die vierte Formel wird weiter so beschaffen sein

$$\mathfrak{R} = R - \int \Omega dx = 0,$$

woher ersichtlich ist, dass nicht nur allein diese  $\mathfrak{R}dx$ , sondern auch alle folgenden integrierbar sein werden.

#### BEMERKUNG

**§104** Diese Theoreme scheine umso schöner, weil deren Beweis auf ein Prinzip solcher Art gestützt wird, dessen Art davon völlig fremd ist, deshalb weil bei diesen Wahrheiten nicht weiter eine Spur der Variationen zu finden ist; daher besteht kein Zweifel, dass der Beweis auch aus einer anderen natürlicheren Quelle geschöpft werden kann [§96].